

Indice

<i>Introduzione</i>	1
<i>Abstract</i>	4
<i>Capitolo 1</i>	7
<i>Modello Matematico</i>	7
1.1. <i>Introduzione</i>	7
1.2. <i>Moto monodimensionale</i>	8
1.3. <i>Termini e coefficienti correttivi</i>	16
1.4. <i>Moto bidimensionale</i>	18
<i>Capitolo 2</i>	23
<i>Integrazione delle equazioni del moto</i>	23
2.1. <i>Introduzione</i>	23
2.2. <i>Moto monodimensionale</i>	23
2.3. <i>Moto bidimensionale</i>	25
2.4. <i>Metodo delle caratteristiche</i>	27

2.4.1. Formulazione caratteristica in una dimensione	29
2.4.2. Presenza di discontinuità	32
Capitolo 3.....	41
Schemi numerici di integrazione	41
3.1. Introduzione	41
3.2. Metodi numerici alle differenze finite-volumi finiti.....	42
3.2.1. Operatori differenziali	44
3.2.2. Formulazione e classificazione degli schemi alle differenze finite	45
3.2.3. Ordine dello schema alle differenze	46
3.2.4. Esistenza, unicità e convergenza della soluzione numerica	47
• Consistenza	48
• Stabilità	48
• Convergenza	49
3.3. Alcuni schemi alle differenze finite frequentemente impiegati ...	50
Schemi centrati	50
3.3.1. Schema di Lax-Friedrichs LF	50
3.3.2. Schema di Lax-Wendroff (LW)	51
3.3.3. Schema di Mc Cormack	52
3.4. Viscosità artificiale	53
3.5. Correzioni TVD	55
3.6. Schemi upwind	57
3.6.1. Equazione scalare	58
3.6.2. Schema upwind del primo ordine per le equazioni vettoriali	63
3.6.3. Schema di Roe	63
3.7. Metodo di estrapolazione di variabili di tipo MUSCL	73
3.8. Weighed Average Flux (WAV)	77
3.9. Solutori utilizzati.....	79
▪ Primo passo temporale	79
▪ Secondo passo temporale	81

3.10.Moto bidimensionale: discretizzazione spaziale ai volumi finiti	83
3.11.Descrizione dello schema numerico utilizzato: schema di Roe	87
Capitolo 4	95
Trattamento dei termini sorgente	95
4.1. Introduzione	95
4.2. Caso monodimensionale	96
4.2.1.Trattamento pointwise	96
4.2.2.Trattamento centrato	97
4.2.3.Trattamento upwind	98
4.3. Caso bidimensionale	111
4.3.1.Trattamento Centrato della pendenza di fondo	112
4.3.2.Trattamento upwind	116
Capitolo 5	122
Condizioni al contorno	122
5.1. Introduzione	122
5.2. Caso monodimensionale	123
5.2.1.Corrente subcritica	123
5.2.2.Corrente supercritica	124
5.2.3.Condizioni al contorno interne	126
5.3. Caso bidimensionale	129
5.3.1.Ingresso supercritico	129
5.3.2.Ingresso subcritico	130
5.3.3.Uscita supercritica	130
5.3.4.Uscita subcritica	131
5.3.5.Caso di parete solida	131
5.3.6.Caso di contorno mobile (Wetting-drying fronts)	132
Capitolo 6	137

<i>Validazione del codice di calcolo</i>	137
6.1. Introduzione	137
6.1. Codice Monodimensionale	139
6.1.1.Soluzione analitica- Soluzione di Riemann	139
6.1.2.Prove Sperimentali	141
6.1.3.Prove a geometria semplice (standard)	142
6.1.4.Prove condotte su canali non prismatici.....	156
6.1.5.Prove con Bruschi restringimenti.....	185
6.1.3.Applicazione al caso reale: Valle del Toce	199
6.2. Codice Bidimensionale	205
6.2.1.Prove su geometria semplice.....	206
▪ Prova n1	210
▪ Prova n2	218
6.2.2.Prove su canali a geometria complessa	234
6.3.3.Presenza di ostacoli.....	264
6.2.9.Evento di piena sul fiume Toce.....	277
<i>Capitolo 7</i>	298
<i>Interfaccia grafica O.R.S.A</i>	298
7.1. Introduzione	298
7.2. Modulo di gestione e acquisizione della topografia	300
7.3. Caratterizzazione delle simulazioni	304
7.4. Definizione delle condizioni idrauliche	304
7.5. Condizioni iniziali	304
7.6. Simulazione del deflusso in corrispondenza dei manufatti	305
7.7. Visualizzazione dei risultati	305
<i>Conclusioni</i>	308
<i>Bibliografia</i>	295

<i>Appendice A</i>	305
<i>Soluzioni Analitiche</i>	305
A.1.Introduzione	305
A.2.Problema di Riemann	306
A.3.Problema di Ritter	310
A.4.Problema di Dressler	313
A.5.Soluzione di Huang e Zheng	317
A.6.Soluzione di Su e Barnes (1970)	318

Introduzione

L'onda di piena generata dal repentino collasso, totale o parziale, di una diga in muratura, dam-break wave, costituisce un evento catastrofico, soprattutto nelle zone poste immediatamente a valle dello sbarramento di ritenuta. Può raggiungere decine di metri di altezza e propagarsi a valle con velocità notevoli, distruggendo insediamenti, infrastrutture, ed è potenzialmente in grado di provocare molte vittime, basti pensare al crollo della diga di Malpasset avvenuto in Francia nel 1959 che causò 433 morti, la più recente rottura della diga nella Germania del sud nel 1999 che causò quattro morti e ingenti danni economici.

L'ICOLD ha stimato che in Europa sono state realizzate tremila grandi dighe, in Italia il Servizio Nazionale Dighe ne controlla e monitora 554.

La prima legge europea sulla rottura delle dighe è stata promulgata in Francia nel 1968 a seguito della sciagura di Malpasset. In Italia le Circolari 1152 del 1986 e 356 del 1987 impongono al gestore dello sbarramento di eseguire studi idraulici per perimetrare le aree inondabili da piene dovute al collasso dello sbarramento ovvero causate da aperture degli organi di scarico.

La comunità Europea ha finanziato nel recente passato i due progetti di ricerca CADAM (Concerted Action on Dam Break Modelling) concluso nel gennaio del 2000 e l'IMPACT (Investigation of Extreme Flood Processes and Uncertainty) attualmente in svolgimento.

L'ufficio Idraulica del Servizio Nazionale Dighe ha stipulato una convenzione con il Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale

dell'Università di Pavia per la "Realizzazione di codici di calcolo per la simulazione della propagazione e dell'espansione di onde di sommersione conseguenti a manovre volontarie o rottura di dighe".

La propagazione di onde di sommersione in alvei naturali è caratterizzata da repentini cambiamenti spazio-temporali del regime di corrente (da subcritica a supercritica e viceversa) e da numerose sezioni di controllo idraulico. Questi regimi devono essere accuratamente simulati dal modello matematico e dal solutore numerico. Per questa ragione non possono essere utilizzati solutori classici quali quelli di Preissmann o Lax Friedrich, ma debbono essere impiegati schemi più moderni di tipo upwind, sviluppati negli anni '80 per l'applicazione in gas dinamica e applicati a partire dagli inizi degli anni '90 anche nell'ambito dell'idraulica e delle costruzioni idrauliche. Durante il lavoro di tesi sono stati sperimentati due solutori numerici del primo e del secondo ordine di accuratezza di tipo upwind

Particolare attenzione è stata data al trattamento dei termini sorgente (pendenza del fondo, resistenza al moto, variazione delle sezioni trasversali) che influenza in modo determinante la propagazione dell'onda di piena. Dopo un'accurata revisione bibliografica sono state applicate e confrontate per un gran numero di prove sperimentali presenti in letteratura le schematizzazioni pointwise (Brufau 2000), centrata (Nuijc 1995) e upwind (Garcia Navarro et al 2002), che sono le più recenti in letteratura.

La propagazione di onde a fronte ripido in alvei naturali è caratterizzata spesso anche da repentine variazioni della sezione trasversale, come bruschi restringimenti, che non sempre possono essere trattati con il modello matematico delle Shallow Water Equations. Se il restringimento è molto brusco è necessario disconnettere il dominio di applicazione delle S.W.E a cavallo della singolarità e applicare delle condizioni al contorno interne, costituite da scale di deflusso ricavate in condizioni di moto permanente.

Il lavoro di tesi ha riguardato in questo ambito sia lo sviluppo di metodi numerici che la realizzazione di prove sperimentali per validarli e capire meglio i fenomeni in gioco. Si è utilizzata la canaletta del laboratorio di Ingegneria

Idraulica e Ambientale inserendo rispettivamente una strettoia e due paratoie in serie.

Parallelamente all'attività appena descritta durante il lavoro di tesi la scrivente ha curato la realizzazione di un interfaccia grafico amichevole chiamato O.R.S.A (Onde di Rottura di Sbarramenti Artificiali) che potesse rendere di più facile utilizzo i codici di calcolo sviluppati, sia per la definizione della topografia, che per la visualizzazione dei risultati, in particolare per la perimetrazione in automatico delle aree di esondazione.

La tesi è suddivisa in sei capitoli. Nel primo si riporta la teoria alla base del modello matematico che la comunità internazionale ha ormai da tempo indicato come il più idoneo per simulare il moto vario di una corrente a superficie libera, le shallow water equations; nel secondo capitolo si fa un'ampia revisione bibliografica degli schemi numerici più frequentemente utilizzati soffermandosi con maggior attenzione agli schemi di tipo upwind e tra questi a quelli considerati nel lavoro di tesi.

Nel terzo capitolo si descrivono criticamente i diversi trattamenti dei termini sorgente presenti in letteratura che sono stati implementati.

Nel quarto capitolo si fa riferimento alle condizioni al contorno sviluppate per il codice di calcolo, in particolare a quelle di monte, di valle ma anche alle condizioni al contorno interne.

Per provare il comportamento degli schemi numerici e della schematizzazione del termine sorgente, nel quinto capitolo si sono simulate un gran numero di prove sperimentali presenti in letteratura, anche appartenenti ai due progetti europei già menzionati (CADAM ed IMPACT)

Nel sesto capitolo si è dato un rapido cenno alle potenzialità dell'interfaccia grafico sviluppato.

Abstract

Dam-break may be summarised as the partial or catastrophic failure of a dam leading to the uncontrolled release of water. Such an event can have a major impact on the land and communities downstream of the failed structure. A dambreak may result in a flood wave up to tens of meters deep travelling along the valley at high speeds. The impact of such a wave on developed areas can be sufficient to destroy infrastructures as roads, railways and bridges, and to demolish buildings.

Failures of dams and water retaining structures continue to occur. The failure of Malpasset Dam in 1959 led to 433 casualties.

ICOLD has reported more than 3000 large and major dams in EU countries. In Italy the National Dam Service controls 554 dams.

In this framework the EU has developed two projects, the CADAM (Concerted Action on Dam Break Modelling) which ended in January 2000 and the IMPACT (Investigation of Extreme Flood Processes and Uncertainty) which is still in development. This Phd thesis can be placed in this context.

The Malpasset failure eventually prompted the introduction of Dam safety legislation into France, in Italy The National Dam Service regulation establishes compulsory studies of flood wave propagation caused by the total or partial failure of dams as well as by regulation manoeuvres.

The National Dam Service has drawn up a convention with our department in order to develop numerical codes to simulate Dam Break flood propagation; one and two dimensional finite volume codes based on the shallow water

equations have been developed applying upwind numerical solver, first and second order accurate. These type of solvers were applied at the beginning to gas-dynamics problems but have shown good results also in fluid dynamics, since they can simulate the formation and the propagation of discontinuities that can originate in the computational domain.

Once chosen the numerical solver great efforts were made towards the source terms treatment. In real word applications abrupt variations of bottom slopes or of cross sections width can affect the propagation more than the solvers accuracy. After an accurate bibliographical revision of source terms treatments in this PhD thesis the pointwise (Brufau 2000), the centered (Nuijc 1995) and the upwind (Garcia Navarro et al 2002) schematisations were applied and compared for a large number of test cases.

During the PhD thesis also laboratory tests were performed. In the simulation of abrupt variations of cross width sections by means of a one dimensional code the inadequacy of source terms treatment came out in the simulation of head losses through hydraulic singularities. As a consequence the computational domain was disconnected at either sides of the singularity. The solution in those sections was evaluated by a rating curve obtained in steady state. This was applied to a sudden constriction and to a gate placed inside the flume of the Laboratory of Hydraulics and Environmental Engineering of the University of Pavia.

In parallel to the above mentioned activity the candidate has followed the realisation of a graphic software called O.R.S.A aimed to a easier use of the numerical codes as well as a better visualisation of the results, moreover the automatic determination of flooded areas.

This PhD thesis is developed into six chapters: in the first one the shallow water equations theory is developed in one and two dimensions, in the second one the state of the art of numerical solvers is reported, with a particular attention to the upwind solvers implemented during the PhD thesis. The third chapter describes the boundary conditions imposed at the upstream and downstream ends, as well as the internal boundary conditions.

In the fourth chapter the source terms schematisations applied are developed in details.

To analyse the behaviour of the numerical scheme as well as the source term treatments a large number of laboratory tests were simulated, some belonging to the IPACT and CADAM projects. The results are analysed in chapter five.

In the sixth chapter the most relevant features of the graphic software are analysed.

Capitolo 1

Modello Matematico

1.1. Introduzione

Nella corrente prassi tecnico-scientifica il moto vario di una corrente a superficie libera che si propaga in alvei naturali ovvero in piane inondabili è descritto mediante le equazioni delle acque basse (*shallow water*) mono e bidimensionali. Lo stesso modello matematico viene utilizzato per studiare la propagazione di un'onda di sommersione provocata dall'improvviso cedimento di uno sbarramento di ritenuta.

In questo capitolo viene descritto il modello matematico delle shallow water equation; per maggior chiarezza verrà prima presentata la trattazione monodimensionale e successivamente quella bidimensionale.

1.2. Moto monodimensionale

Le shallow water equation costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che possono essere ricavate con le seguenti ipotesi, enunciate da De St Venant (Cunge et al, 1980):

- la distribuzione della velocità in una sezione trasversale ortogonale alla direzione del moto è rappresentabile in termini di velocità media e il livello d'acqua nella sezione è orizzontale (flusso monodimensionale);
- la curvatura delle linee di flusso è piccola e le accelerazioni verticali sono trascurabili, quindi la distribuzione della pressione è idrostatica (corrente gradualmente variata);
- gli effetti della resistenza del contorno e della turbolenza possono essere messi in conto con leggi di resistenza analoghe a quelle impiegate per moto stazionario;
- la pendenza di fondo alveo è piccola;
- fluido è monofase a densità costante.

L'alveo può non essere prismatico, ossia le sezioni trasversali possono variare lungo la linea d'asse, ma le variazioni debbono essere congruenti con l'ipotesi di corrente gradualmente variata.

Lo stato della corrente è descritto con due variabili dipendenti: tipicamente l'area bagnata A e la portata Q , che sono funzione delle variabili indipendenti: spazio - coordinata corrente lungo la linea d'asse del corso d'acqua- e tempo (x e t).

Il moto della corrente può essere descritto con tre leggi fisiche di bilancio di: massa e quantità di moto o energia. Sono pertanto possibili due rappresentazioni matematiche:

- conservazione della massa e della quantità di moto,
- conservazione della massa e dell'energia.

Se le variabili sono continue le due rappresentazioni sono del tutto equivalenti. Attraverso discontinuità della corrente, ad esempio un risalto idraulico ovvero un'onda a fronte ripido che si propaga su un preesistente tirante idrico, l'energia non si conserva, e pertanto solo la prima formulazione è corretta (Abbot, 1979). Per questa ragione il modello matematico comunemente utilizzato è basato sul bilancio della massa e della quantità di moto nel volume di controllo considerato.

Consideriamo un volume di controllo delimitato da due sezioni x_1 e x_2 (Fig. 1.1), e studiamone la variazione tra due istanti di tempo t_1 e t_2 . La differenza tra la massa entrante e uscente dal volume di controllo attraverso i contorni:

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho \cdot u \cdot A)_{x_1} - (\rho \cdot u \cdot A)_{x_2}] \cdot dt \quad (1.2.1)$$

deve essere uguale alla variazione di volume durante l'intervallo di tempo considerato:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho \cdot A)_{t_2} - (\rho \cdot A)_{t_1}] \cdot dx \quad (1.2.2)$$

dove ρ è la densità dell'acqua, u la velocità media della corrente. Il bilancio di massa di un fluido a densità costante può essere scritto, in forma integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] \cdot dx + \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_2} - (Q)_{x_1}] \cdot dt = 0 \quad (1.2.3)$$

dove $Q = u A$ è la portata.

La conservazione della quantità di moto richiede che la variazione di quantità di moto nel volume di controllo sia pari alla somma della quantità di

moto entrante/uscente attraverso lo stesso e delle forze esterne che agiscono sul volume nello stesso intervallo di tempo.

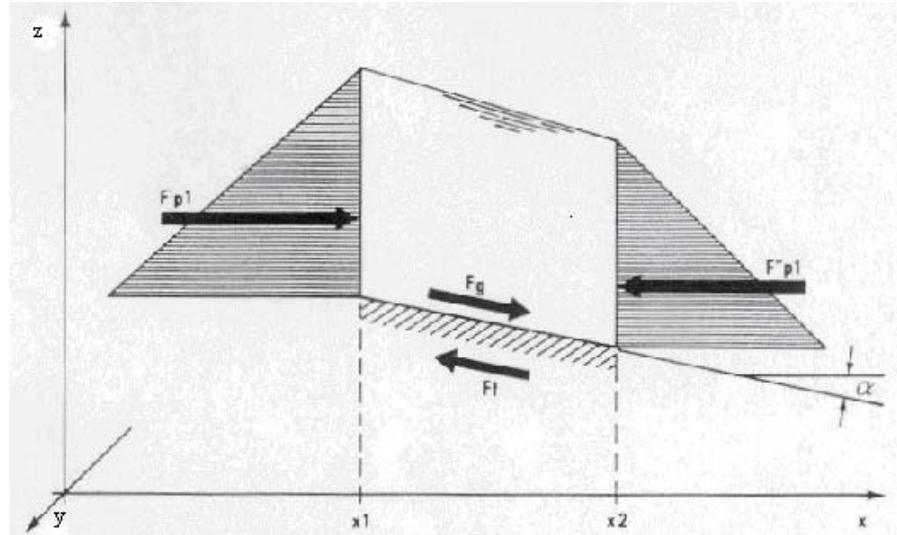


Figura 1.1 Volume di controllo - sezione longitudinale

Il flusso netto di quantità di moto nel volume di controllo è:

$$\left(\rho \cdot u^2 \cdot A\right)_{x_1} - \left(\rho \cdot u^2 \cdot A\right)_{x_2} \quad (1.2.4)$$

e quindi la differenza tra le quantità di moto entranti/uscenti:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\rho \cdot u^2 \cdot A\right)_{x_1} - \left(\rho \cdot u^2 \cdot A\right)_{x_2} \right] \cdot dt \quad (1.2.5)$$

La variazione di quantità di moto nell'intervallo di tempo considerato vale:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[(\rho \cdot u \cdot A)_{t_2} - (\rho \cdot u \cdot A)_{t_1} \right] \cdot dx \quad (1.2.6)$$

Le forze esterne che agiscono sul volume di controllo sono rispettivamente: la differenza di spinta idrostatica, la forza di gravità e la resistenza del contorno. La spinta idrostatica è data dalla differenza tra le spinte F'_{p^1} e F''_{p^1} esercitate sulle facce del volume di controllo (Fig. 1.2)

$$F'_{p^1} = g \cdot \int_0^{h(x)} \rho \cdot [h(x) - \eta] \cdot b(x, \eta) \cdot d\eta \quad (1.2.7)$$

dove η è la variabile di integrazione lungo l'asse Z , $h(x, t)$ la profondità dell'acqua e $b(x, h)$ la larghezza della sezione. Allora l'integrale nel tempo spinta idrostatica è dato dalla:

$$\int_{t_1}^{t_2} F'_{p^1} dt = \int_{t_1}^{t_2} (F'_{p^1} - F''_{p^1}) \cdot dt = g \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left[(\rho \cdot I_1)_{x_1} - (\rho \cdot I_1)_{x_2} \right] \cdot dt \quad (1.2.8)$$

dove con I_1 si è indicato il momento statico della sezione bagnata rispetto alla superficie libera

$$I_1 = \int_0^{h(x)} (h - \eta) \cdot b(x, \eta) \cdot d\eta \quad (1.2.9)$$

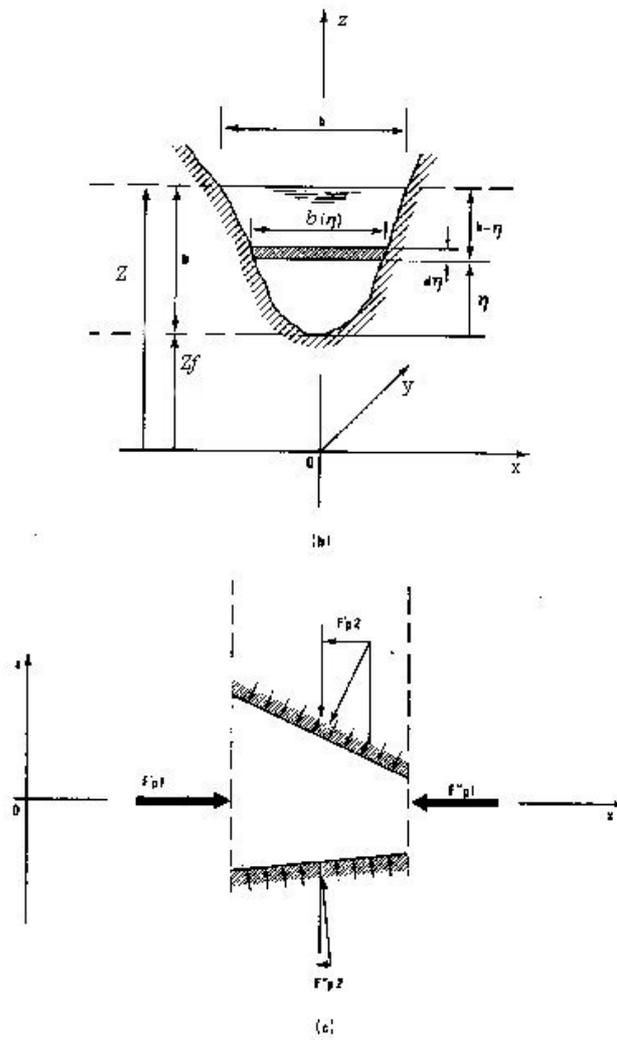


Figura 1.2 (b) sezione trasversale (c) spinta idrostatica

La risultante delle spinte idrostatiche sulla superficie laterale del canale e quindi alla variazione di area bagnata è data dall'integrale lungo il volume di controllo tra gli istanti di tempo t_1 e t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F_p dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot I_2 \cdot dx \cdot dt \quad (1.2.10)$$

dove l'integrale I_2 tiene conto della differenza di spinta sul contorno:

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h - \eta) \left[\frac{\partial b}{\partial x} \right]_{h=h_0} \cdot d\eta \quad (1.2.11)$$

dove con h_0 si è indicato un fissato tirante idrico.

La forza dovuta alla forza di gravità viene valutata assumendo che la pendenza del letto del corso d'acqua sia piccola, e che sia possibile sostituire a $\sin\alpha$ la pendenza di fondo $S_0 = \tan\alpha$ (Fig. 1.1):

$$\int_{t_1}^{t_2} F_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot g \cdot A \cdot S_0 \cdot dx \cdot dt \quad (1.2.12)$$

In maniera analoga può essere espressa la resistenza del contorno in funzione della cadente della linea dei carichi totali S_f

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F_f dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot g \cdot A \cdot S_f dx \cdot dt \quad (1.2.13)$$

In conclusione la conservazione della quantità di moto può essere espressa nella forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(uA)_{t_2} - (uA)_{t_1}] dx = \int_{t_1}^{t_2} [(u^2 A)_{x_1} - (u^2 A)_{x_2}] dt + \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho \cdot I_2 \cdot dx \cdot dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A(S_0 - S_f) \cdot dx \cdot dt \quad (1.2.14)$$

Le equazioni (1.2.3) e (1.2.14) costituiscono la forma integrale delle equazioni del moto vario di una corrente monodimensionale a superficie libera. E' importante sottolineare che queste relazioni integrali sono state ricavate senza imporre la continuit  delle variabili A e Q .

A partire dalle relazioni integrali, possono essere ricavate relazioni differenziali ipotizzando che le variabili dipendenti siano continue. Effettuando uno sviluppo in serie di Taylor e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene:

$$(A)_{t_2} = (A)_{t_1} + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \Rightarrow (A)_{t_2} - (A)_{t_1} = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t \quad (1.2.15)$$

$$(Q)_{x_2} = (Q)_{x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \Rightarrow (Q)_{x_2} - (Q)_{x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x$$

A titolo di esempio, l'equazione di continuit  diventa:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt \cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \cdot dt = 0 \quad (1.2.16)$$

Si ottengono allora le equazioni differenziali usualmente denominate equazioni delle acque basse o nella letteratura anglosassone shallow water equation.

Equazione di continuità

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.2.17)$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \quad (1.2.18)$$

Le equazioni (1.2.17) e (1.2.18) sono scritte in forma conservativa o divergente. Se il secondo membro delle equazioni è zero, queste equazioni rappresentano la conservazione delle funzioni massa e quantità di moto in ogni linea chiusa del piano cinematico (x,t) , in caso contrario il secondo membro rappresenta il termine sorgente.

1.3. Termini e coefficienti correttivi

La presenza di un apporto o di una riduzione di portata distribuita lungo la coordinata x , si pensi a esondazioni laterali per sormonto delle sommità arginali, verrà tenuta in conto introducendo un termine ulteriore nell'equazione di continuità.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1.3.1)$$

Nel caso di esondazione q è negativa e viene calcolata assimilando le sommità spondali/arginali, poste a quota Z_a , ad uno stramazzo caratterizzato da coefficiente di efflusso μ e di lunghezza L

$$q = \mu \sqrt{2g} (Z - Z_a)^{1.5} L \quad (1.3.2)$$

Poiché la velocità varia nella sezione trasversale deve essere introdotto il coefficiente di ragguglio della quantità di moto di Boussinesq:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_f = 0 \quad (1.3.3)$$

$$\beta = \frac{\int_0^h u^2(\eta) \cdot b(\eta) \cdot d\eta}{u^2 \cdot A} \quad (1.3.4)$$

Nel caso di sezioni composte di area A il termine (1.3.4) viene discretizzato utilizzando l'equazione di Chezy secondo la (Ven Te Chow 1982):

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^m K_i^2 h_i^{7/3} b_i}{K^2 / A} \quad (1.3.5)$$

dove con m si è indicato il numero di parti in cui è divisa la sezione, ciascuna avente area A_i , livello h_i , larghezza b_i e con coefficiente di resistenza al moto espresso secondo Strickler K_i .

Tutti questi termini correttivi sono stati sviluppati nel modello monodimensionale per le possibili applicazioni a casi di esondazione e/o di immissione di portata all'interno del tratto di alveo considerato.

1.4. Moto bidimensionale

Le equazioni (1.2.17) e (1.2.18) rappresentano le leggi di conservazione di massa e quantità di moto per una corrente monodimensionale a superficie libera, dove le variabili Q ed A sono legate alle variabili indipendenti x e t . Nell'estensione al caso bidimensionale dovrà essere introdotta una ulteriore variabile indipendente, ossia la coordinata y (vedi fig 1.3)

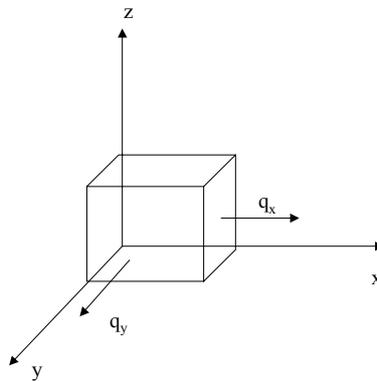


Figura 1.3-Volume finito nello spazio x-y-t

Nell'equazione di continuità si deve considerare anche il flusso in direzione y e quindi si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (1.4.1)$$

dove con q_x e q_y si sono indicate le portate unitarie.

Anche la quantità di moto deve essere conservata lungo le direzioni x ed y

separatamente. Nella situazione monodimensionale si era considerato che la quantità di moto lungo la direzione x potesse entrare solo dalla faccia x . In due dimensioni la quantità di moto in direzione x può essere trasportata anche lungo la faccia y . Allora la quantità di moto che entra nell'elemento di volume che si sta considerando può essere vista come somma dei due contributi di quantità di moto dovuti alle due componenti della velocità lungo $x(u)$ e lungo $y (v)$

$$\frac{q_x^2}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x^2}{h} \right) \quad \frac{q_x \cdot q_y}{h} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_x \cdot q_y}{h} \right). \quad (1.4.2)$$

La conservazione della quantità di moto in direzione x diventa allora:

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) + g \frac{\partial (h^2/2)}{\partial x} = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (1.4.3)$$

dove la pendenza del fondo è considerata lungo la direzione x .
La corrispondente equazione nella direzione y è analogamente:

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y^2}{h} \right) + g \frac{\partial (h^2/2)}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (1.4.4)$$

Le equazioni (1.4.3) e (1.4.4) insieme alla (1.4.1) descrivono il moto di una corrente bidimensionale a superficie libera. Sono comunemente utilizzate per descrivere il deflusso di una corrente e si basano sulle stesse ipotesi espresse nel paragrafo 1.1.

In realtà le (1.4.3, 1.4.4) trascurano anche i termini relativi allo sforzo di Reynolds; questi termini sono usualmente ignorati nella simulazione della propagazione di onde a fronte ripido alla scala di una piana inondabile in quanto influenzano marginalmente il campo di moto (Cetina e Rajar 1994, Alcrudo 2002).

Nel caso in cui si voglia tenere in conto l'effetto dovuto agli sforzi di Reynolds, nell'equazione di bilancio della quantità di moto in direzione x ed y sono presenti due termini supplementari.

Le equazioni di Navier Stokes (NS) descrivono il moto tridimensionale di una corrente. Le NS possono essere mediate nel tempo, scegliendo un intervallo temporale T grande rispetto al tempo scala delle fluttuazioni turbolente, ma piccolo rispetto ai tempi scala degli altri effetti che dipendono dal tempo. Si ottengono in questo modo le Reynolds Averaged Navier Stokes Equations (RANS) che descrivono il flusso medio.

L'equazione di bilancio della quantità di moto mediata porta all'introduzione del tensore di sforzo di Reynolds, che tiene in conto di tutti gli effetti dovuti alla turbolenza. Essendo il suo valore incognito il tensore di sforzo di Reynolds viene generalmente espresso in funzione di relazioni di chiusura del sistema, che rappresentano relazioni tra le variabili incognite, basate su considerazioni teoriche accoppiate ad informazioni empiriche. Queste relazioni si dicono modelli di turbolenza, come ad esempio i modelli $k-\epsilon$.

L'introduzione dei termini dovuti agli sforzi turbolenti nelle equazioni delle acque basse in due dimensioni trasforma le (1.4.3) e (1.4.4) nelle:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{q_x^2}{h} \right)}{\partial x} + g \frac{\partial \left(\frac{h^2}{2} \right)}{\partial x} &= gh(S_0 - S_{fx}) \\
+ \frac{\partial \left(h v_{ef} \frac{\partial \left(\frac{q_x}{h} \right)}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(h v_{ef} \frac{\partial \left(\frac{q_x}{h} \right)}{\partial y} \right)}{\partial y} &
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{q_y^2}{h} \right)}{\partial y} + g \frac{\partial \left(\frac{h^2}{2} \right)}{\partial y} &= gh(S_0 - S_{fy}) \\
+ \frac{\partial \left(h v_{ef} \frac{\partial \left(\frac{q_y}{h} \right)}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(h v_{ef} \frac{\partial \left(\frac{q_y}{h} \right)}{\partial y} \right)}{\partial y} &
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

dove con v_{ef} si è indicata la viscosità cinematica effettiva.

Capitolo 2

Integrazione delle equazioni del moto

2.1. Introduzione

Le equazioni del moto e di continuità illustrate nel capitolo precedente costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico. Questo capitolo dedica particolare attenzione al metodo delle caratteristiche che permette di trasformare le equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) in equazioni differenziali ordinarie (ODE), che vengono poi risolte numericamente come verrà esposto nel capitolo 4.

2.2. Moto monodimensionale

Il sistema costituito dalle equazioni (1.2.17) e (1.2.18) può essere riscritto in forma vettoriale (Alcrudo e Gracia Navarro 1992, Cunge et al 1980) come :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.2.1)$$

dove

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.1a)$$

Introducendo la matrice jacobiana A funzione del flusso F come $A = \frac{\partial F}{\partial U}$, l'equazione (2.2.1) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.2.2)$$

Se A non dipende da U la (2.2.2) rappresenta un sistema lineare. Il sistema (2.2.1) si dice iperbolico se, e solo se, sono soddisfatte le due condizioni per ciascun punto del dominio (Hirsch 1992):

- Tutti gli autovalori a_k ($k=1, 2$) di A , definiti come radici dell'equazione caratteristica $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$, sono reali.
- E' possibile trovare una matrice non singolare \mathbf{P} tale che $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ è una matrice diagonale con autovalori a_k come elementi diagonali; A allora può essere diagonalizzata con una trasformazione di similitudine.
- Tutte le righe (le colonne) di \mathbf{P} (\mathbf{P}^{-1}) costituiscono un sistema completo di autovettori sinistri (destri).

Per un sistema quasi lineare a_k è funzione di (t, x, U) . Se il sistema è lineare a e U sono indipendenti. Nel piano $x-t$ le curve identificate dall'equazione

differenziale $\frac{dx}{dt} = a_k$ sono dette curve caratteristiche. Se tutti gli autovalori sono reali e distinti ci saranno due caratteristiche diverse che passano per ciascun punto del dominio di riferimento. Il sistema si dice allora strettamente iperbolico.

2.3. Moto bidimensionale

In un dominio semplicemente connesso nello spazio di definizione (t, x, y, U) il sistema di equazioni del flusso può essere espresso in forma matriciale dalla:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (2.3.1)$$

$$\text{dove } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{q_x \cdot q_y}{h} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_x \cdot q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}$$

Introducendo le matrici jacobiane \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y in funzione dei vettori flusso \mathbf{F} e \mathbf{G} come $\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ e $\mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}}$, il sistema di equazioni (2.3.1) diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (2.3.2)$$

che risulta iperbolico se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- Tutti gli autovalori della matrice sono reali per qualsiasi coppia di valori reali α_1 ed α_2 tali che $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ che rappresentano i coseni direttori di una qualsiasi linea di propagazione nel piano x - y . Essi valgono: $a_2 = \mathbf{u}\alpha_1 + \mathbf{v}\alpha_2$; $a_{1,3} = a_2 \pm \sqrt{gh}$
- Esiste un sistema completo di 3 autovettori ortogonali normalizzati indipendenti.

2.4. Metodo delle caratteristiche

Qualsiasi perturbazione originatasi in una certa sezione di un corso d'acqua può propagarsi sia verso valle che verso monte. Nel piano cinematico $x-t$, (Fig. 2.1a) una perturbazione originatasi nel punto Q , interessa la regione tratteggiata delimitata dalle due curve C^+ e C^- , che rappresentano le traiettorie della perturbazione. Per contro, lo stato del sistema in un generico punto P dipende dalle variabili nella regione tratteggiata. (Fig.2.1b)

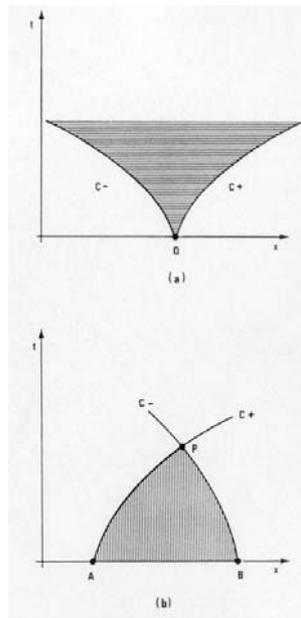


Figura 2.1- Propagazione della perturbazione -(a)zona di disturbo del punto Q;(b)zona di influenza del punto P

Se la perturbazione forma onde in acque basse di piccola ampiezza, le linee che determinano i confini di questa regione sono chiamate caratteristiche. La perturbazione è determinata da discontinuità delle derivate prime e di ordine successivo delle variabili dipendenti e dei termini di sorgente.

Le discontinuità della pendenza della superficie libera $\frac{\partial h}{\partial x}$ o del gradiente di velocità $\frac{\partial u}{\partial x}$ si propagano lungo le caratteristiche con una celerità uguale a quella delle onde delle acque basse, cioè:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \left(g \frac{A}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.1)$$

$$\text{dove } b(h) = \frac{\partial A}{\partial h}.$$

In funzione della direzione delle linee caratteristiche, si distinguono i tre regimi di corrente:

- Corrente subcritica: la celerità $\left(g \frac{A}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$ è più grande del valore assoluto della velocità $|u|$, le pendenze delle caratteristiche hanno segno opposto e quindi la soluzione nel punto P dipende dallo stato del sistema a monte e a valle (Fig. 2.2a).
- Corrente critica: vale l'uguaglianza $|u| = \left(g \frac{A}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$ e una delle velocità caratteristiche di propagazione risulta nulla (fig. 2.2b).
- Corrente supercritica: risulta $|u| > \left(g \frac{A}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$ e le pendenze delle due linee caratteristiche hanno lo stesso segno (Fig.2.2c) e quindi la soluzione nel punto P dipende solo dalle condizioni di monte.

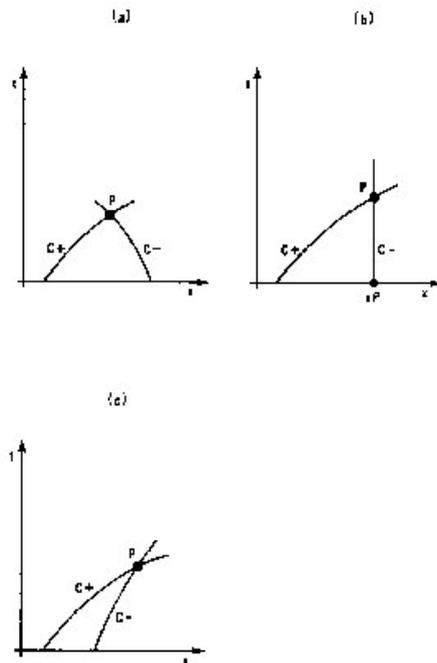


Figura 2.2-Struttura delle caratteristiche e loro relazione al tipo di corrente nel punto P.(a) corrente subcritica; (b) corrente critica, (c) corrente supercritica nella direzione positiva

2.4.1. Formulazione caratteristica in una dimensione

La matrice jacobiana A che compare nell'equazione (2.2.2) può essere scritta come:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

dove con c si è indicata la velocità di propagazione delle piccole perturbazioni all'interno del fluido definita come $c^2=gh$. Gli autovalori della matrice \mathbf{A} , che indicheremo con a^k ($k=1,2$) rappresentano le velocità di propagazione delle perturbazioni definite come $a^{1,2}=u \pm c$ e sono sempre reali e positivi (tiranti idrici non negativi). I corrispondenti autovettori sono, a meno di una normalizzazione adeguata:

$$e^k = \pm \frac{c}{2g} \begin{pmatrix} 1 \\ a^k \end{pmatrix} \quad k = 1,2 \quad (2.4.3)$$

e risultano indipendenti nelle situazioni di interesse (tiranti idrici non negativi).

La trasformazione che diagonalizza lo Jacobiano può essere espressa, indicando con $\mathbf{\Lambda}$ la matrice diagonale ottenuta da $\mathbf{A}=\text{diag}(a^k)$, come $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, avendo introdotto la matrice di trasformazione \mathbf{P} .

Il sistema di equazioni (2.2.2) può essere allora disaccoppiato moltiplicandolo per la matrice \mathbf{P}^{-1} e definendo le variabili caratteristiche in forma differenziale come $\mathbf{P}^{-1} \partial \mathbf{U} = \partial \mathbf{W}$ arrivando all'espressione:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \quad (2.4.4)$$

A partire da questo sistema è possibile ottenere in modo esplicito le variabili caratteristiche in forma integrale che valgono $w^{1,2}=u \pm 2c$. Il sistema (2.4.4) può essere scritto in forma compatta :

$$\frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (2.4.5)$$

Il sistema (2.4.5) non è completamente disaccoppiato a causa della non linearità delle equazioni che devono essere risolte simultaneamente.

Se si trascura il termine sorgente $g(S_0 - S_f)$ si può dimostrare che lungo la linea $dx/dt = a^{1,2} = u \pm c$ del piano cinematico le variabili caratteristiche $w^{1,2} = u \pm 2c$ rimangono costanti. La (2.4.5) può essere riscritta come:

$$\frac{dw^k}{dt} = g(S_0 - S_f) \frac{dx}{dt} = a^k \quad (2.4.5a)$$

Le variabili w^k sono chiamate invarianti di Riemann.

Nel caso in cui si consideri un alveo naturale, può essere introdotta la variabile di Escoffer come:

$$\omega(h) = \int_0^h \sqrt{\frac{gb(\eta)}{A(\eta)}} d\eta \quad (2.4.6)$$

il cui differenziale si può calcolare con la nota regola di Liebnitz e vale:

$$d\omega = \sqrt{\frac{gb(h)}{A(h)}} dh = \sqrt{\frac{gb(\eta)}{A(\eta)}} \frac{dA}{b} = c \frac{dA}{A} \quad (2.4.7)$$

In questo caso la forma caratteristica del sistema di equazioni (2.4.5) diventa:

$$\frac{d(u \pm \omega)}{dt} + (u \pm c) \frac{d(u \pm \omega)}{dx} = g \left(\frac{I_2}{A} + S_0 - S_f \right) \quad (2.4.8)$$

la cui interpretazione è identica alla (2.4.5) tranne per l'aggiunta di un termine sorgente dovuto alla possibile variazione della sezione. La (2.4.8) diventa la (2.4.5) nel caso in cui σ sia costante, ciò è equivale a porre $\omega=2c$.

2.4.2. Presenza di discontinuità

Nel caso in cui le variabili che compaiono nelle condizioni iniziali o in quelle al contorno o le loro derivate risultino discontinue, la discontinuità si propagherà lungo le caratteristiche e quindi anche la soluzione all'interno del dominio risulterà discontinua. Inoltre, dato che la pendenza delle caratteristiche in ogni punto del dominio (x,t) dipende dalla soluzione U , due caratteristiche della stessa famiglia potrebbero anche intersecarsi nel generico punto Q (Fig 2.3) generando una discontinuità, nonostante la soluzione al tempo iniziale sia continua.

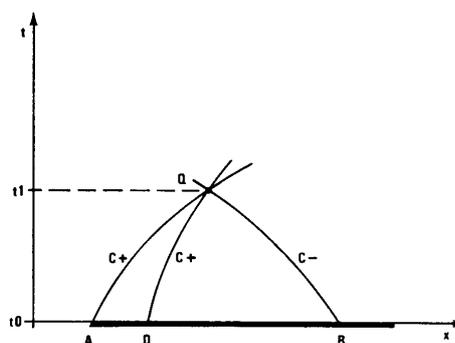


Figura 2.3 Linee caratteristiche per un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari

A titolo di esempio si consideri la presenza di un risalto idraulico che costituisce una discontinuità dell'area bagnata: attraverso il risalto il modello matematico delle acque basse non è valido in quanto la corrente non può essere considerata gradualmente variata a causa delle accelerazioni verticali. In questo

caso le equazioni differenziali cadono in difetto e possono essere utilizzate solo le equazioni integrali applicate ad un volume di controllo che includa la discontinuità.

Per un alveo prismatico, il bilancio di massa e di quantità di moto attraverso un risalto idraulico portano alle

$$v = \frac{A_1 \cdot (u_1 - u_2)}{A_1 - A_2} + u_2 \quad (2.4.9)$$

$$u_1 - u_2 = \pm \left(g \frac{A_1 - A_2}{A_1 A_2} (A_1 \cdot \eta_1 - A_2 \cdot \eta_2) \right)^{1/2} \quad (2.4.10)$$

dove con i pedici 1 e 2 si sono indicate le sezioni a monte e a valle del risalto (vedi fig 2.4), v è la celerità di propagazione della discontinuità ed η la distanza del baricentro della sezione dalla superficie libera. Sostituendo la (2.4.9) nella (2.4.10) si ottiene l'equazione di Rankine-Hugoniot:

$$v = u_2 \pm \left(g \frac{h_1 (h_1 + h_2)}{h_2} \right)^{1/2} \quad (2.4.11)$$

Nel piano cinematico la discontinuità separa due regioni 1 e 2 (Fig.2.4) ove la corrente è gradualmente variata.

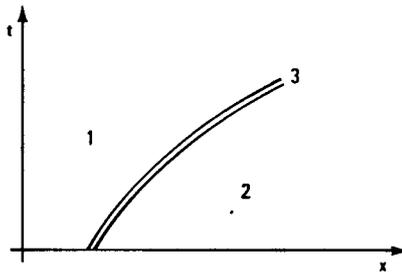


Figura 2.4 Percorso di propagazione della discontinuità (3) che separa le regioni 1 e 2

La traiettoria della discontinuità è descritta dall'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2.4.12)$$

che, per un osservatore che si muova con velocità v , si riduce all'equazione del risalto idraulico stazionario.

La celerità della discontinuità definita dalla (2.4.10) è diversa rispetto a quella delle perturbazioni infinitesime, definita come:

$$c = \left(g \frac{A}{b} \right)^{1/2} \quad (2.4.13)$$

Dalla (2.4.11) si nota che $v < c$ a monte e $v > c$ a valle della discontinuità.

Nel caso in cui sia presente all'interno del piano (x, t) una discontinuità (Fig. 2.5), è possibile che due coppie di caratteristiche si incontrino nello stesso punto, determinando così due valori della soluzione.

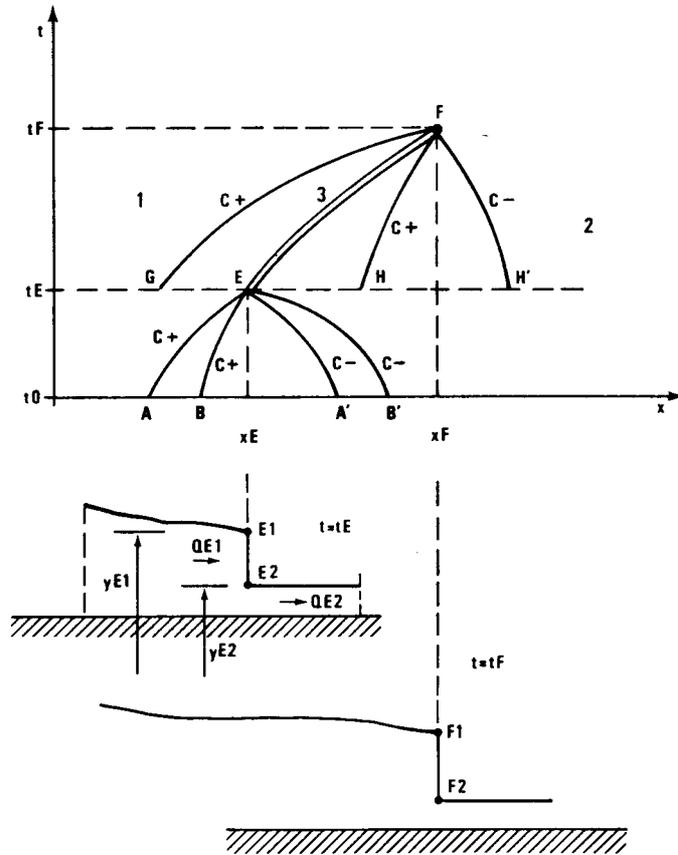


Figura 2.5-Presenza di una discontinuità nel punto E e suo percorso di propagazione tra le regioni continue 1 (monte) e 2 (valle)

Consideriamo la situazione al tempo t_E in figura 2.5. Esiste una soluzione doppia nel punto singolare E dove si trovano due coppie di soluzioni (y_{E1}, Q_{E1}) , (y_{E2}, Q_{E2}) in corrispondenza delle due coppie di caratteristiche AE, A'E e BE, B'E. A cominciare dal tempo t_E ci sarà una discontinuità nel sistema. Volendo calcolare la soluzione ad un tempo $t_F > t_E$ supponiamo di conoscere lo stato iniziale lungo la linea $t=t_E$. Come nel caso del punto E anche nel punto F si avrà

una coppia di soluzioni e si avranno quattro incognite: $y_{F1}, Q_{F1}, y_{F2}, Q_{F2}$. Ci sarà solamente una curva caratteristica positiva che cattura il fronte al tempo t_F . Due caratteristiche arrivano al punto F dalla regione continua (2) la caratteristica positiva HF e quella negativa H'F. La forma di queste curve dipende dalla soluzione nel punto F, y_{F2} e Q_{F2} e dalla posizione di x_F . Conseguentemente le ascisse x_G, x_H e $x_{H'}$ sono incognite, in quanto dipendono dalla soluzione del punto F dalle equazioni delle caratteristiche (2.4.1). Per definire il flusso al tempo $t=t_F$ dobbiamo determinare otto incognite: quattro variabili del flusso $y_{F1}, Q_{F1}, y_{F2}, Q_{F2}$ e quattro ascisse $x_G, x_H, x_F, x_{H'}$. La soluzione del problema è possibile dal momento che si hanno a disposizione otto equazioni: 2 equazioni differenziali per ogni curva caratteristica (GF, HF, H'F) e le due relazioni algebriche lungo la discontinuità (2.4.9) e (2.4.10).

Riprendiamo le equazioni in forma integrale e ammettiamo di trascurare i termini di sorgente:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (2.4.14)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) \right] dx dt = 0$$

Le espressioni (2.4.14) possono allora essere riscritte in forma di integrali al contorno come:

$$\oint [A dx + Q dt] = 0$$

$$\oint \left[Q dx + \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) dt \right] = 0 \quad (2.4.15)$$

che possono venire integrate lungo la linea di contorno A-A'-B-B' (Fig 2.6).

La soluzione delle relazioni integrali è data dalle due coppie di valori U_1 U_2 se, e solo se, la discontinuità soddisfa alle equazioni (2.4.9) e (2.4.10).

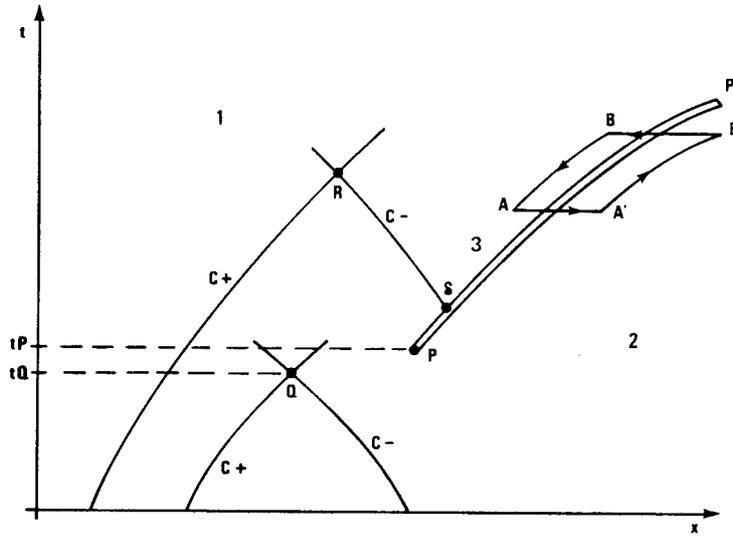


Figura 2.6 Regioni di flusso dove è necessario utilizzare la forma divergente dell'equazione di conservazione della quantità di moto

Ne consegue che se U_1 e U_2 sono due soluzioni i cui domini di definizione nel piano (x,t) sono separati una discontinuità; esse soddisfano le relazioni (2.4.11) se, e solo se, risulta $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ e i valori di U_1 e U_2 in entrambi i lati della discontinuità soddisfano alla condizione:

$$v[U]_1^2 = [F(U)]_1^2 \tag{2.4.16}$$

dove si è indicato con $[]_1^2$ la variazione delle grandezze contenute nelle parentesi nel passaggio da un lato all'altro della discontinuità. Una soluzione di questo tipo è chiamata soluzione debole delle equazioni differenziali.

Le condizioni espresse dall'equazione (2.4.11) limitano la validità delle

soluzioni deboli ad una certa forma delle equazioni del flusso. Per un canale orizzontale e rettangolare di larghezza unitaria, supponendo trascurabile l'attrito, detta h la profondità, noto che $Q = uh$, e $I_f = 0.5h^2$, se tutte le variabili sono continue i vettori \mathbf{U} e \mathbf{F} possono essere scritti nella forma:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} h \\ uh \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{gh^2}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.4.17)$$

ovvero si possono esprimere come:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} h \\ u \end{Bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} uh \\ gh + \frac{u^2}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.4.18)$$

Dalla relazione (2.4.11) si ottiene:

$$v = \frac{u_2h_2 - u_1h_1}{h_2 - h_1}; v = \frac{\left(u_2^2h_2 + \frac{gh_2^2}{2}\right) - \left(u_1^2h_1 + \frac{gh_1^2}{2}\right)}{u_2h_2 - u_1h_1} \quad (2.4.19)$$

Eliminando u_1 dalle equazioni (2.4.10) si ottiene la stessa celerità (2.4.11). Ma se si considera la forma (2.4.18) l'equazione (2.4.16) porta ad un valore diverso:

$$v = \frac{u_2h_2 - u_1h_1}{h_2 - h_1} \quad v = \frac{\left(\frac{u_2^2}{2} + gh_2\right) - \left(\frac{u_1^2}{2} + gh_1\right)}{u_2 - u_1} \quad (2.4.20)$$

Eliminando u_1 si trova:

$$v' = u_2 \pm \left(\frac{2gh_1^2}{h_2 + h_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.21)$$

Si può notare che le equazioni (2.4.21) e (2.4.11) non sono equivalenti, eccetto che nel caso in cui $h_1 = h_2$, e inoltre risulta evidente che l'equazione (2.4.11) è la soluzione fisicamente valida mentre la (2.4.21) non lo è.

Dalla non equivalenza delle equazioni (2.4.21) e (2.4.11) si arriva ad una conclusione molto importante: è possibile ottenere soluzioni valide delle equazioni differenziali solamente se queste sono scritte in forma divergente o conservativa.

Come si può vedere nella figura 2.6 prima che appaia la discontinuità, per $t < t_p$ le soluzioni nelle due forme (2.4.17) e (2.4.18) sono equivalenti. Non è importante quale forma si sceglie per arrivare alla soluzione nel punto P. Ma la soluzione nel punto R è influenzata dalla discontinuità in PP' attraverso la caratteristica RS. La soluzione fisica delle relazioni integrali (2.4.15) nel punto R è la stessa di quella ottenuta a partire dalle equazioni differenziali (2.2.1) solamente se queste ultime sono state espresse in termini conservativi. Nel caso in cui si sia utilizzata una scrittura in termini non divergenti, non solo la soluzione nella discontinuità differirà dalla soluzione delle relazioni integrali, ma potrebbe anche non sviluppare discontinuità stessa. Allora nel caso in cui sia possibile lo svilupparsi di discontinuità nel flusso modellato tramite equazioni differenziali, queste ultime devono essere scritte in forma divergente.

Capitolo 3

Schemi numerici di integrazione

3.1. Introduzione

Per il modello matematico descritto al Capitolo 2, riconosciuto come appropriato per la descrizione della propagazione di onde di sommersione in alvei naturali, non sono disponibili soluzioni analitiche, che sono state ricavate per condizioni geometriche semplici (alveo prismatico, pendenza di fondo costante, coefficienti di resistenza al moto indipendenti dal raggio idraulico, vedi Appendice A). I sistemi di equazioni (2.2.1) e (2.3.1) debbono pertanto essere risolti per integrazione numerica. In questo capitolo si farà cenno ai due metodi di integrazione numerica più diffusamente impiegati nelle applicazioni (differenze finite e volumi finiti) e ad alcuni schemi di integrazione, con particolare riguardo agli schemi di tipo upwind, che sono stati utilizzati nelle elaborazioni.

3.2. Metodi numerici alle differenze finite-volumi finiti

Il fondamento di base del metodo alle differenze finite è la sostituzione di funzioni valide in tutti i punti del dominio con funzioni definite su una griglia di punti all'interno del dominio considerato. Le derivate si trasformano in operatori differenziali in modo tale da trasformare le equazioni differenziali (2.2.1) e (2.3.1) in relazioni algebriche alle differenze finite. I modi diversi in cui vengono espresse le derivate tramite funzioni discrete si dicono *schemi alle differenze finite*.

La griglia di calcolo può essere uniforme nello spazio (lungo l'asse x nel caso monodimensionale), nel qual caso si hanno $N-1$ intervalli spaziali uguali Δx , ovvero non uniforme, allora si avranno intervalli di lunghezza variabile. In generale la discretizzazione lungo l'asse x può essere definita attraverso un insieme di punti:

$$w_{h_x} = \{x_j = j\Delta x, j = 1, 2, \dots, N; \Delta x_j = x_{j+1} - x_j\} \quad (3.2.1)$$

Analogamente nel caso bidimensionale la discretizzazione spaziale lungo y sarà definita come:

$$w_{h_y} = \{y_j = j\Delta y, j = 1, 2, \dots, N; \Delta y_j = y_{j+1} - y_j\} \quad (3.2.2)$$

Analogamente la discretizzazione temporale è definita dall'insieme di punti

$$w_\tau = \{t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, M; \Delta t_n = t_{n+1} - t_n\}. \quad (3.2.3)$$

La griglia di calcolo nel piano (x,y,t) è definita dall'insieme $w = w_{h_x} \times w_{h_y} \times w_t$ che è detto insieme di punti di calcolo. Una griglia di calcolo non uniforme può essere conveniente per studiare la corrente in parti del dominio dove le grandezze e/o la geometria del canale variano bruscamente.

La formulazione ai volumi finiti ha come punto di partenza le equazioni di conservazione scritte in forma integrale:

$$\oint [Udx - F(U)dt] = 0 \tag{3.2.4}$$

dove la linea di integrazione racchiude un volume di controllo nel piano cinematico $x-t$ di dimensioni $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] [t^n, t^{n+1}]$ (vedi fig 3.1)

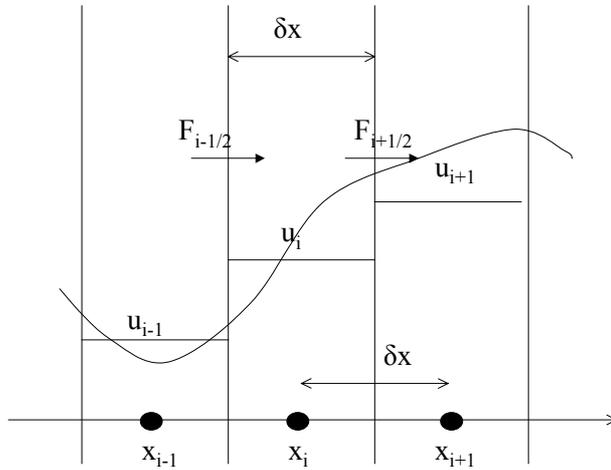


Figura 3.1- Volume finito in una dimensione

La (3.2.4) può essere discretizzata nella forma:

$$\int_{x^{-1/2}}^{x^{+1/2}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx = \int_{x^{-1/2}}^{x^{+1/2}} \mathbf{U}(x, t^n) dx - \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}\left(\mathbf{U}\left(x_{i+1/2}, t\right)\right) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}\left(\mathbf{U}\left(x_{i-1/2}, t\right)\right) dt \right] \quad (3.2.5)$$

Definendo \mathbf{U}_i^n il valore medio di $\mathbf{U}(x,t)$ nell'intervallo Δx al tempo $t=t^n$

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x^{-1/2}}^{x^{+1/2}} \mathbf{U}(x, t^n) dx \quad (3.2.6)$$

e il flusso medio nell'intervallo di tempo

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}\left(\mathbf{U}\left(x_{i-1/2}, t\right)\right) dt \quad (3.2.7)$$

la forma integrale del sistema di equazioni di conservazione di massa e quantità di moto diventa:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}] \quad (3.2.8)$$

Nel caso monodimensionale i due metodi sono tra loro coincidenti, ma nel caso bidimensionale il metodo ai volumi finiti risulta molto più flessibile del metodo alle differenze finite.

3.2.1. Operatori differenziali

Si riportano le notazioni che si utilizzeranno in seguito per la scrittura degli operatori differenziali:

$$\blacksquare \text{ Operatore Differenza in avanti: } \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (3.2.9)$$

$$\blacksquare \text{ Operatore Differenza all'indietro: } \nabla f(x) = f(x) - f(x - \Delta x) \quad (3.2.10)$$

$$\blacksquare \text{ Operatore differenza centrata } \delta f(x) = f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (3.2.11)$$

3.2.2. Formulazione e classificazione degli schemi alle differenze finite

Gli schemi alle differenze possono essere caratterizzati in vari modi:

- Schemi impliciti o espliciti;

In uno schema esplicito alle differenze finite le variabili che descrivono il moto in ogni punto j al livello temporale $n+1$ possono essere calcolate esclusivamente a partire dai valori che le stesse variabili assumono nei punti adiacenti al livello temporale precedente n . Questi schemi permettono di trovare la soluzione al tempo $(n+1)\Delta t$ in ciascun punto della griglia separatamente dagli altri punti incogniti.

Questi schemi sono di facile programmazione ma, essendo condizionatamente stabili, richiedono la limitazione del passo di integrazione temporale.

Secondo uno schema implicito le variabili al tempo $(n+1)\Delta t$ sono funzione dei valori delle variabili nei punti adiacenti al tempo $(n+1)\Delta t$. In questo caso le equazioni devono essere risolte simultaneamente per tutti i punti del dominio di calcolo al tempo $n+1$.

Questi schemi sono incondizionatamente stabili e permettono di utilizzare passi temporali relativamente ampi, ma il sistema risultante è non lineare e deve

quindi essere risolto iterativamente. Per la simulazione di onde provocate da rottura dighe sono solitamente usati schemi espliciti in quanto il fenomeno è repentino e la sua evoluzione può essere descritta solo con passi di integrazione ridotti.

- Schemi centrati, non centrati;

Uno schema centrato fa uso di operatori alle differenze centrate nell'approssimazione delle derivate spaziali, quindi è simmetrico nello spazio. Uno schema non centrato ha una distribuzione non simmetrica dei nodi.

- Schemi one-step, two step;

Gli schemi one step permettono di calcolare direttamente le grandezze al tempo $(n+1) \Delta t$ a partire dalla soluzione nota al tempo $n \Delta t$. Gli schemi two-step si articolano in un passo di previsione che permette di trovare la soluzione in un tempo intermedio, e quindi in un passo di correzione per trovare la soluzione al tempo $(n+1) \Delta t$.

Gli schemi numerici two step sono del secondo ordine di accuratezza nel tempo e sono, ovviamente, più onerosi di quelli one-step dal punto di vista computazionale.

3.2.3. Ordine dello schema alle differenze

L'ordine di uno schema è un indice importante per descrivere l'accuratezza dello schema stesso. E' determinato dall'ordine di grandezza dei residui al tendere dei passi temporale e spaziale a zero; sostituendo infatti ai differenziali le differenze finite si commette un errore di troncamento. Si effettui uno sviluppo in serie di Taylor della generica funzione $f(x,t)$; il valore della funzione nel punto $x_j + \Delta t$, noto il valore della funzione nel punto x_j vale:

$$f(x_j + \Delta x, t_n) = f(x_j, t_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + O(\Delta x^4) \quad (3.2.12)$$

dove $O(\Delta x^4)$ raggruppa tutti i termini rimanenti, il primo dei quali dipende da Δx^4 . L'espressione della derivata sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{3!} - O(\Delta x^3) \quad (3.2.13)$$

Nel caso in cui esprimiamo

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_h = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{\Delta x^2}{3!} - O(\Delta x^3) = \frac{\partial f}{\partial x} + O(\Delta x) \quad (3.2.14)$$

possiamo dire che l'approssimazione della derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$ con l'operatore differenziale $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_h$ è del primo ordine. L'ordine di approssimazione è quindi pari al valore dell'esponente meno uno dell'incremento Δx o Δt che appare nel primo termine della serie di Taylor che viene trascurato nell'approssimazione alle differenze finite.

3.2.4. Esistenza, unicità e convergenza della soluzione numerica

La soluzione di uno schema alle differenze finite dovrebbe essere unica e convergere alla soluzione esatta dell'equazione differenziale quando il passo temporale tende a zero.

Caratteristiche importanti di uno schema numerico sono le seguenti:

- **Consistenza**

La consistenza rappresenta l'accuratezza con la quale lo schema numerico rappresenta l'equazione differenziale originaria. Uno schema sarà consistente rispetto all'equazione originale se riducendo Δx e Δt a zero l'operatore differenza tende all'operatore differenziale.

- **Stabilità**

La comparsa di errori di arrotondamento è insita nel calcolo, a causa di una aritmetica limitata e ad un numero fisso di cifre significative. L'algoritmo è stabile se questi errori sono limitati, mentre è instabile se gli errori crescono senza controllo durante il calcolo fino a distruggere la soluzione.

Al tendere di Δt e Δx a zero l'errore di troncamento tende a zero. Ma solo se il calcolo è stabile la sequenza delle soluzioni approssimate tende alle soluzioni esatte. Se il calcolo non è stabile le soluzioni differiscono sempre di più al tendere a zero di Δt e Δx . Al diminuire del passo temporale o a seguito di un raffinamento della griglia di calcolo si otterranno delle oscillazioni della soluzione. Uno schema alle differenze si dice stabile se l'insieme infinito delle possibili soluzioni calcolate: $z(j\Delta x, n\Delta t)$ con $0 \leq \Delta t \leq \tau \cdot 0 \leq n\Delta t \leq T$ è uniformemente limitato.

Si definisce il numero di Courant-Friedrichs-Lewy come:

$$CFL = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \tag{3.2.15}$$

dove con a si è indicata il valore massimo raggiunto da $u \pm c$, con Δt il passo temporale e con Δx il passo spaziale di discretizzazione.

La condizione di stabilità impone che $CFL < 1$.

- **Convergenza**

Uno schema numerico si dice convergente se la soluzione ottenuta tende al valore della soluzione esatta quando Δt e Δx tendono a zero. Detta u_i^n la soluzione numerica ottenuta nei punti della rete e \bar{u}_i^n la soluzione esatta che soddisfa all'equazione differenziale, si deve verificare che,

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|u - \bar{u}\| = 0 \quad (3.2.16)$$

La convergenza di uno schema garantisce che la soluzione ottenuta da una maglia con un certo numero di punti sia una buona approssimazione della soluzione che si va cercando e, nel caso che non lo sia, rimpicciolendo la maglia si può ottenere una approssimazione della soluzione esatta tanto migliore quanto più è permesso dal mezzo di calcolo.

Non esistono strumenti analitici per studiare la convergenza di uno schema alle differenze finite per un problema generico. Gli unici strumenti a disposizione sono stati sviluppati per le equazioni lineari, che derivano dalle espressioni complete non lineari. Per le equazioni lineari la condizione di convergenza è assicurata dal teorema di Lax: *per un problema con condizione iniziale ben posta e uno schema lineare consistente, la stabilità è una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza.*

3.3. Alcuni schemi alle differenze finite frequentemente impiegati

Schemi centrati

Gli algoritmi centrati sono stati i primi ad essere utilizzati per l'integrazione delle Shallow Water Equation. Gli schemi del primo ordine sono diffusivi, mentre quelli del secondo ordine provocano oscillazioni spurie a cavallo delle discontinuità.

3.3.1. Schema di Lax-Friedrichs LF

E' uno schema esplicito del primo ordine nello spazio e nel tempo. E' stato progettato come variante stabile del metodo esplicito di Eulero. Si utilizzano le differenze centrate del secondo ordine per le derivate spaziali e si ottiene (Hirsh 1992):

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) \quad (3.3.1)$$

Come si può vedere dalla (3.3.1) ad ogni passo di tempo il calcolo della soluzione nei punti pari è disaccoppiato da quello per i punti dispari. Per questa ragione lo schema di Lax Friedrichs è molto diffusivo. La (3.3.1) può essere riscritta come:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{i+1}^n + -2\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i-1}^n) \quad (3.3.2)$$

Lo schema non è in grado di ricostruire con precisione la posizione della discontinuità. E' quindi poco idoneo per simulare l'avanzamento di onde a fronte ripido. Diffusamente impiegato nel passato, è oggi quasi completamente abbandonato in favore degli schemi centrati del secondo ordine.

3.3.2. Schema di Lax-Wendroff (LW)

Tutti gli schemi centrati del secondo ordine possono essere ricondotti a quello di Lax Wendroff, originariamente sviluppato per applicazioni in gas-dinamica: per questa ragione viene brevemente richiamato sebbene sia poco utilizzato per la simulazione della propagazione di onde di sommersione.

E' uno schema a due passi (predictor-corrector) per ottenere un'accuratezza del secondo ordine nello spazio e nel tempo. Le derivate spaziali sono discretizzate centralmente:

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \\ \frac{\Delta t^2}{2(\Delta x)^2} \left[A_{i+1/2}^n (F_{i+1}^n - F_i^n) - A_{i-1/2}^n (F_i^n - F_{i-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

dove $A_{i+1/2}^n = A \left(U_{i+1/2}^n \right)$. In forma conservativa la (3.3.3) può essere scritta come:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*) \quad (3.3.4)$$

dove il flusso numerico nella (3.3.4) può essere espresso come:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \mathbf{A}_{i+1/2}^n (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \quad (3.3.5)$$

Come tutti gli schemi del secondo ordine produce delle oscillazioni a cavallo delle discontinuità (Hirsch, 1992)

3.3.3. Schema di Mc Cormack

Costituisce un'estensione dello schema di Lax Wendroff. E' uno schema centrato di tipo predictor-corrector: con il passo predictor si ottiene la soluzione a un tempo intermedio, mentre col passo corrector la derivata spaziale è calcolata con la media aritmetica della differenza in avanti al tempo t_n e di quella all'indietro del valore precedentemente calcolato al tempo t_{n+1} .

Per la sua semplicità e per la buona capacità nel riprodurre il movimento di fronti, è uno degli schemi centrati più diffusamente applicati. Si può descrivere come:

$$\mathbf{U}_j^p = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n) \quad (3.3.6)$$

$$\mathbf{U}_j^c = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_j^p - \mathbf{F}_{j-1}^p) \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^p + \mathbf{U}_j^c) \quad (3.3.8)$$

Come tutti gli schemi del secondo ordine centrati produce oscillazioni spurie a cavallo delle discontinuità Per eliminarle si adottano diverse tecniche numeriche, utilizzando dissipatori o limitatori. Nel primo caso si inserisce un termine di viscosità artificiale alle espressioni dei flussi numerici, nel secondo si utilizzano funzioni limitatrici dei flussi o della curvatura della superficie libera.

Gli schemi del primo ordine non presentano questi problemi in quanto l'errore di troncamento che si commette è proporzionale alla derivata seconda, che fa le veci di una viscosità numerica.

Se si considera ad esempio lo schema di Lax-Friedrichs la (3.3.1) può essere riscritta come:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i+1}^n - 2\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_{i-1}^n) \quad (3.3.9)$$

dove l'ultimo termine tra parentesi può essere considerato come il termine di viscosità apparente $\nu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2}$. Gli schemi di questo tipo smorzano le componenti di alta frequenza e riducono i forti gradienti.

3.4. Viscosità artificiale

I metodi numerici aventi secondo ordine di precisione presentano un errore di troncamento il cui termine più importante contiene le derivate spaziali di ordine dispari. Per esempio, nello schema di Lax Wendroff (3.3.3) l'errore di troncamento sui può esprimere come:

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta x^2}{6} (1 - \nu^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (3.4.1)$$

che contiene la derivata di ordine tre. Questo termine determina il comportamento dispersivo dello schema, che provoca oscillazioni in presenza di discontinuità.

Questi effetti possono essere considerevolmente ridotti o del tutto eliminati con l'introduzione di un termine di viscosità artificiale nello schema numerico.

I termini introdotti devono essere ad una scala tale da non interferire sull'ordine di precisione del metodo, ma devono essere in grado di mitigare le oscillazioni ed eliminarle mentre si formano.

Il concetto di viscosità artificiale è stato introdotto per primo da Von Neumann e Richtmyer (1950) con l'idea di realizzare un meccanismo che riproducesse gli effetti della diffusività delle quantità di moto e della conduzione del calore a scala macroscopica, per il calcolo delle onde di shock nei gas.

La correzione dello schema di Mc Cormack (3.3.6-7) può essere espressa secondo l'approccio di Jameson (Jameson, 1982) per le equazioni di Eulero, sostituendo al posto della pressione p la quota della superficie libera Z .

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^P - \mathbf{U}_i^c) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(d_{i+1/2}^n - d_{i-1/2}^n \right) \quad (3.4.2)$$

dove si è indicato con:

$$d_{i+1/2} = \xi_{i+1/2}^{(2)} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \quad (3.4.3)$$

$$\xi_{i+1/2}^{(2)} = \max(\varepsilon_i^{(2)}, \varepsilon_{i+1}^{(2)}) \quad (3.4.4)$$

e con

$$\xi_i^{(2)} = \frac{\kappa^{(2)} |Z_{i+1} - 2Z_i + Z_{i-1}|}{\zeta |Z_{i+1}| + 2|Z_i| + |Z_{i-1}|} \quad (3.4.5)$$

ove $\kappa^{(2)}$ è un parametro che deve essere calibrato per ciascuna applicazione e con ζ si è indicato il rapporto $\Delta t/\Delta x$. Il termine di viscosità inoltre

modificherà la soluzione in ogni punto del dominio e non solo nella zona della discontinuità.

I vantaggi della viscosità numerica sono principalmente insiti nella facilità di controllare la dissipazione grazie a un parametro che risulta essere sostanzialmente di taratura. Questo schema è stato impiegato da diversi autori (Aureli e Mignosa 2002) ed applicato con buoni risultati a problemi di rottura diga.

3.5. Correzioni TVD

L'idea alla base di questo tipo di correzioni è l'applicazione dei limitatori ai gradienti dei flussi numerici o ai gradienti delle variabili dipendenti. In questo modo le oscillazioni vengono eliminate e non corrette dopo essere state generate dallo schema. Una misura delle oscillazioni presenti in soluzione è data dalla Variazione Totale

$$TV(\mathbf{U}^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n| \quad (3.5.1)$$

Se la variazione totale non cresce nel tempo:

$$TV(\mathbf{U}^{n+1}) \leq TV(\mathbf{U}^n) \quad (3.5.2)$$

non si verificano oscillazione nella soluzione e lo schema numerico soddisfa alla condizione di variazione totale decrescente (TVD). Molti schemi di ordine superiore al primo vengono corretti in questo modo, al fine di preservare la monotonicità della soluzione. E' prassi comune utilizzare dei limitatori per rendere TVD lo schema di Mc Cormack e di Lax Wendroff . Si genera un termine di dissipazione che non contiene parametri esterni alle equazioni che debbono essere tarati.

Con riferimento allo schema di Mac Cormack, viene introdotto il termine:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j^p + \mathbf{U}_j^c) + \left(\mathbf{D}_{j+1/2} - \mathbf{D}_{j-1/2} \right) \quad (3.5.3)$$

dove con $\mathbf{D}_{j+1/2}$ si è indicata la dissipazione artificiale introdotta per produrre uno schema TVD. Il termine di dissipazione non lineare dipende dal numero di Courant ed è limitato in modo tale da eliminare oscillazioni nella soluzione.

L'estensione dello schema McCormack con l'algoritmo TVD è la forma più naturale ed efficiente per permettere l'inclusione dei termini sorgente delle equazioni senza diminuire l'ordine di precisione dello schema.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^p &= \mathbf{U}_i^n - \zeta (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \\ \mathbf{U}_i^c &= \mathbf{U}_i^n - \zeta (\mathbf{F}_{i+1}^p - \mathbf{F}_{i-1}^p) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c) + \zeta (\mathbf{D}_{i+1/2}^n - \mathbf{D}_{i-1/2}^n) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

dove :

$$\mathbf{D}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[1 - \varphi \left(r'_{i+1/2} \right) \right] \cdot \left| \mathbf{A}_{i+1/2} \right| \cdot \left(1 - \zeta \cdot \left| \mathbf{A}_{i+1/2} \right| \right) \delta \mathbf{U}_{i+1/2} \quad (3.5.5)$$

Il secondo termine è dato dalla correzione dello schema in TVD e rappresenta il termine di viscosità artificiale. L'argomento r' della funzione di limitazione φ è definito ad esempio dalla:

$$r'_{i+1/2} = \frac{1}{r_{i+1/2}} = \frac{\mathbf{A}_{i+1/2}^s \cdot \left(1 - \left|v_{i+1/2}^s\right|\right) \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2}^{-s}}{\mathbf{A}_{i+1/2}^s \cdot \left(1 - \left|v_{i+1/2}^s\right|\right) \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2}} \quad (3.5.6)$$

dove con s è stato indicato il segno di $a_{i+1/2}$.

Si segnala che, sebbene lo schema di McCormack sia di tipo centrato, la variante TVD dello stesso ha una componente upwind, a causa della forma dell'argomento della funzione di limitazione nel termine $\mathbf{D}_{i+1/2}$.

Questo schema è stato adottato da numerosi autori (Aureli et al 1998, Aureli e Mignosa 2000, Alcrudo et al 1992) ed applicato con buoni risultati a brusche variazioni del fondo e a graduali variazioni delle sezioni trasversali.

3.6. Schemi upwind

Gli schemi che sono stati illustrati finora sono basati sulla discretizzazione centrata spaziale. Di conseguenza, presentando una simmetria rispetto alla variazione del segno degli autovalori della matrice Jacobiana del flusso, non tengono conto della direzione di propagazione delle linee caratteristiche. Ne consegue che uno schema centrato schematizza i flussi sempre allo stesso modo indipendentemente dai regimi della corrente, non facendo dipendere i flussi solo da monte (regime supercritico) e da monte e valle (regime subcritico).

Gli schemi di tipo upwind permettono di discretizzare i flussi in accordo col regime della corrente, in modo da prevenire la formazione di oscillazioni indesiderate nei pressi delle discontinuità.

I metodi che nascono in questo modo possono appartenere a due famiglie: flux-splitting (scomposizione del flusso) o rifarsi allo schema di Godunov. I primi operano sul vettore di flusso in quanto l'informazione sulla direzione di propagazione della discontinuità è ricavata dal segno degli autovalori dello jacobiano del vettore di flusso opportunamente discretizzato. I

secondi definiscono le variabili nelle celle di calcolo e le discontinuità tra le celle vengono trattate risolvendo ogni volta localmente il problema di Riemann. Le soluzioni trovate in questo modo vengono poi utilizzate per definire i nuovi valori nella cella tenendo in conto correttamente della direzione di propagazione delle perturbazioni.

Entrambe le famiglie appartengono alla categoria dei metodi shock capturing, in grado di catturare le discontinuità presenti nel campo di moto e propagarle senza dover utilizzare particolari condizioni al contorno interne.

3.6.1. Equazione scalare

Consideriamo una generica equazione scalare (Alcrudo 1992)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.6.1)$$

dove u rappresenta la variabile da determinare ed $f(u)$ la generica funzione del flusso. L'equazione è lineare se $f(u)=au$ con a , velocità di convezione, costante.

La schematizzazione *upwind* impiega operatori differenziali in avanti ovvero all'indietro, in dipendenza del segno di a . Nel caso in cui a sia positiva si avrà:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_i^n - u_{i-1}^n) = u_i^n - \zeta \cdot (f_i^n - f_{i-1}^n) \quad (3.6.2)$$

Se a fosse negativa, la discretizzazione da utilizzare sarebbe la seguente:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (u_{i+1}^n - u_i^n) = u_i^n - \zeta (f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (3.6.3)$$

Risulta utile definire i flussi f^+ ed f^- associati alle velocità di convezione positiva e negativa rispettivamente come:

$$f_i^+ = \begin{cases} au_i^n & \text{per } a > 0 \\ 0 & \text{per } a < 0 \end{cases} \quad (3.6.4)$$

$$f_i^- = \begin{cases} au_i^n & \text{per } a < 0 \\ 0 & \text{per } a > 0 \end{cases} \quad (3.6.5)$$

allora lo schema *upwind* del primo ordine si può scrivere in forma compatta come

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \zeta \cdot \mathcal{F}_{i+1/2}^* \quad (3.6.6)$$

dove $\zeta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ed il flusso numerico è espresso come $f_{i+1/2}^* = f_i^+ + f_{i+1}^-$

Nel caso in cui la relazione (3.6.1) non fosse lineare, cioè f non fosse una funzione lineare in u , la velocità di convezione potrebbe cambiare segno localmente. Questo causerebbe la necessità di dover ridefinire lo schema *upwind* nel tempo cambiando lo schema di integrazione in dipendenza di a .

Un modo per ottenere uno schema *upwind* conservativo consiste nel partire dall'espressione formale:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \zeta \cdot (f_i^+ - f_{i-1}^+) - \zeta \cdot (f_{i+1}^- - f_i^-) \quad (3.6.7)$$

che è valida in caso di velocità di convezione positive e negative. Le funzioni di flusso sono però da specificare. Un modo per farlo è definire la

velocità di convezione approssimata $\tilde{a}_{i+1/2}$ sulla parete che separa le celle i e $i+1$ definita come

$$\tilde{a}_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{(f_{i+1} - f_i)}{(u_{i+1} - u_i)} \text{ per } (u_{i+1} - u_i) \neq 0 \\ a(u_i) = a(u_{i+1}) \text{ per } (u_{i+1} - u_i) = 0 \end{cases} \quad (3.6.8)$$

in entrambi i casi si ottiene:

$$\delta f_{i+1/2} = \tilde{a}_{i+1/2} \cdot \delta u_{i+1/2} \quad (3.6.9)$$

Scomponendo $\tilde{a}_{i+1/2}$ nella parte positiva e negativa secondo la :

$$\tilde{a}_{i+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{i+1/2} \pm \left| \tilde{a}_{i+1/2} \right| \right) \quad (3.6.10)$$

si arriva alla decomposizione del flusso come:

$$\delta f_{i+1/2}^{\pm} = \tilde{a}_{i+1/2}^{\pm} \cdot \delta u_{i+1/2} \quad (3.6.11)$$

Allora lo schema *upwind* del primo ordine per un'equazione scalare non lineare si scrive come:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \zeta \cdot \tilde{a}_{i-1/2}^+ \cdot \delta u_{i-1/2} - \zeta \cdot \tilde{a}_{i-1/2}^- \cdot \delta u_{i+1/2} \quad (3.6.12)$$

che si può esprimere come la (3.6.7) esprimendo il flusso come:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} \left[f_{i+1} + f_i - \left| \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}} \right| \cdot \delta u_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.6.13)$$

L'inconveniente che presenta lo schema upwind del primo ordine è che il coefficiente di viscosità numerica può tendere a zero se è nulla la velocità di convezione a . Questo potrebbe causare la comparsa di discontinuità numeriche non fisiche, incompatibili con la condizione di entropia, che assicura che le soluzioni appartengano al comportamento reale del fluido.

Riprendendo l'espressione del flusso numerico di Roe (3.6.13) uno schema numerico è detto schema E (che rispetta la condizione di entropia) se vale la:

$$\left[f_{i+\frac{1}{2}}^* - f(u) \right] \text{segno}(u_{i+1} - u_i) \leq 0 \quad (3.6.14)$$

che riscritta in virtù della (3.6.13) porta alla condizione:

$$\frac{[f_i + f_{i+1} - 2f(u)]}{\delta u_{i+\frac{1}{2}}} \leq |a|_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.6.15)$$

per ogni valore di u compreso tra u_i e u_{i+1} . Se si considera una funzione di flusso convessa, come in figura 3.2, la (3.6.15) sarà sempre verificata a meno che l'intervallo $(i, i+1)$ contenga il punto u^* per il quale la funzione $f(u)$ si annulla. In questo caso si annulla il secondo membro della (3.6.15) e si determinano shock di espansione. Sarà allora necessario ridefinire il valore al secondo membro in modo tale da non permettere mai la comparsa di discontinuità numeriche ma non fisiche.

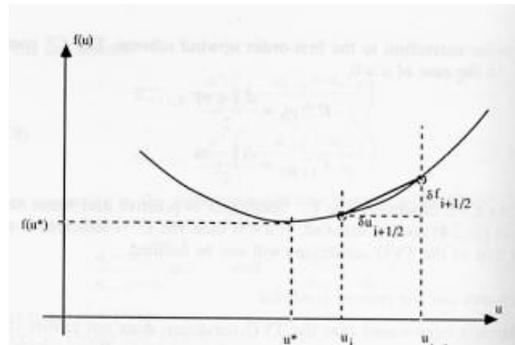


Figura 3.2-Schema di una funzione scalare di flusso convessa, con il punto u^*

Si introduce la correzione di entropia, sostituendo ad $\left| \tilde{a}_{i+1/2} \right|$ l'espressione:

$$\left| \tilde{a}_{i+1/2} \right| = \begin{cases} \left| \tilde{a}_{i+1/2} \right| & \text{se } \left| \tilde{a}_{i+1/2} \right| \geq \varepsilon \\ \varepsilon_i & \text{se } \left| \tilde{a}_{i+1/2} \right| < \varepsilon \end{cases} \quad (3.6.16)$$

dove con ε si è indicato una quantità piccola a piacere. In questo modo lo schema upwind del primo ordine converge sempre a soluzioni compatibili con il principio di entropia che scarta la presenza di discontinuità che non siano fisiche.

3.6.2. Schema upwind del primo ordine per le equazioni vettoriali

Si consideri il sistema di equazioni (2.2.1) : nel caso di corrente subcritica le pendenze delle linee caratteristiche hanno segno discorde, ossia la perturbazione si propaga in entrambe le direzioni, mentre nel caso corrente supercritica le pendenze hanno lo stesso segno e quindi la perturbazione si propaga da monte verso valle.

Per costruire uno schema upwind valido per tutti i regimi e per tutte le direzioni di flusso è necessario adoperare una opportuna decomposizione del flusso in relazione alla pendenza delle linee caratteristiche ossia al segno degli autovalori della matrice iacobiana e quindi scrivere formalmente il sistema:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \zeta \cdot \Delta \mathbf{F}_{j+1/2}^- - \zeta \cdot \Delta \mathbf{F}_{j-1/2}^+ \quad (3.6.17)$$

dove $\Delta \mathbf{F}_{j+1/2}^\pm$ sono gli incrementi di flusso associati a celerità positive e negative tra le due celle j e $j+1$.

3.6.3. Schema di Roe

Si scriva il sistema (2.2.1) nella forma non conservativa:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.6.18)$$

che può essere diagonalizzata per ottenere la

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \quad (3.6.19)$$

dove si è indicato con $\partial \mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} \partial \mathbf{U}$ e $\Lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$, essendo \mathbf{P} e \mathbf{P}^{-1} matrici di trasformazione. Gli autovalori di \mathbf{A} rappresentano, come già visto, la celerità di propagazione delle perturbazioni; nel caso in cui \mathbf{A} fosse costante il sistema (3.6.18) sarebbe totalmente disaccoppiato.

La costruzione di uno schema upwind per risolvere il sistema di equazioni di partenza passa per una linearizzazione locale del sistema considerato. Questa approssimazione fu sviluppata per prima da Roe (1981). Il sistema di equazioni è approssimato localmente nelle interfaccia che separano le celle di calcolo.

Si definisce allora una matrice approssimata $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ per la coppia di punti $(i, i+1)$ della maglia che soddisfa alle seguenti proprietà:

- 1) $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}(U_{i+1}, U_i)$
- 2) $\delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2}$
- 3) $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ è costituita da valori reali e distinti
- 4) $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}(U_i, U_i) = \mathbf{A}(U_i)$

La proprietà 1) è solo una restrizione logica sulla dipendenza di $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ in modo da semplificare il problema, la 2) garantisce che la discretizzazione upwind basata su $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ sia conservativa, la 3) è una conseguenza della necessità che la linearizzazione costruita abbia lo stesso comportamento iperbolico del sistema di equazioni (2.1.1), la 4) garantisce la consistenza con l'equazione originaria.

Una volta che si sia costruita la matrice $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ che verifica le proprietà 1)..4) le equazioni sono facilmente discretizzate in forma upwind utilizzando la

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \left(\frac{a^k \pm |a^k|}{2} \right).$$

Glaister (1998) propose di calcolare $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2}$ come $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2})$ cioè la matrice jacobiana del flusso esatto calcolata in un punto medio $\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2}$ che è determinato per alveo rettangolare.

Grazie alla proprietà 4) si determina la matrice $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2})$ che abbia autovalori e autovettori del tipo:

$$\tilde{a}_{i+1/2}^{1,2} = \tilde{u}_{i+1/2}^{1,2} \pm \tilde{c}_{i+1/2}^{1,2} \quad (3.6.20)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{a}_{i+1/2}^{1,2} \end{pmatrix} \quad (3.6.21)$$

e il problema di determinare \mathbf{A} diventa quello di trovare i valori medi di \tilde{u} e \tilde{c} che rispettano le proprietà 1)..4)

In virtù della 3) qualunque variazione della variabile $\delta \mathbf{U}_{i+1/2}$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2})$ secondo la:

$$\delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \sum_{k=1,2} \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^k \quad (3.6.22)$$

essendo $\alpha_{i+1/2}^k$ i coefficienti della scomposizione che valgono

$$\alpha_{i+1/2}^k = \frac{\delta h_{i+1/2}}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \cdot \left[\delta(h \cdot u)_{i+1/2} - \tilde{u}_{i+1/2} \cdot \delta h_{i+1/2} \right] \quad (3.6.23)$$

Grazie alla proprietà 2) la variazione di flusso $\delta \mathbf{F}_{i+1/2}$ si può esprimere come:

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{A}_{i+1/2} \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \sum_{k=1,2} \tilde{\alpha}_{i+1/2}^k \cdot \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^k \quad (3.6.24)$$

che, data la coppia $\left(\delta \mathbf{F}_{i+1/2}; \delta \mathbf{U}_{i+1/2} \right)$, rappresentano due equazioni scalari in $\tilde{u}_{i+1/2}^{1,2} \cdot \mathbf{e} \cdot \tilde{c}_{i+1/2}^{1,2}$. Dalla seconda espressione si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta h_{i+1/2} \left(\tilde{u}_{i+1/2} \right)^2 - 2\delta(hu)_{i+1/2} \tilde{u}_{i+1/2} + \delta(hu^2)_{i+1/2} = \\ \delta h_{i+1/2} \left(\tilde{c}_{i+1/2} \right)^2 - \delta \left(g \frac{h^2}{2} \right)_{i+1/2} \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

che risulta essere uguale a zero perché ciascun membro è una espressione nelle variabili totalmente indipendenti. Allora si ottiene il valore di $\tilde{c}_{i+1/2}^{1,2}$ (Alcrudo et al 1992)

$$\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}^{1,2} = \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{A_{i+1}}{b_{i+1}} + \frac{A_{i+1}}{b_{i+1}} \right)} \quad (3.6.26)$$

e quello di $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{1,2}$ come radice dell'equazione di secondo grado che annulla il primo membro della (3.6.25):

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{1,2} = \frac{\sqrt{h_{i+1}} \cdot u_{i+1} + \sqrt{h_i} \cdot u_i}{\sqrt{h_{i+1}} + \sqrt{h_i}} \quad (3.6.27)$$

In questo modo la matrice $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}$ risulta totalmente specificata. La matrice è sempre ben definita, tranne nel caso di altezza d'acqua nulla, nel qual caso gli autovalori diventano coincidenti. La matrice $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}$ può allora essere diagonalizzata mediante la trasformazione seguente:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{P}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.6.28)$$

con

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^1 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^2 \end{pmatrix} \quad (3.6.29)$$

essendo

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^1 & \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^2 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{i+\frac{1}{2}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^2 & 1 \\ \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6.30)$$

La discretizzazione upwind conservativa del primo ordine si può allora estendere formalmente al sistema di equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto ottenendo:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \zeta \cdot (\mathbf{F}_i^+ - \mathbf{F}_{i-1}^+) - \zeta \cdot (\mathbf{F}_{i+1}^- - \mathbf{F}_i^-) \quad (3.6.31)$$

essendo $\zeta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, dove le differenze del flusso associate a velocità positive e negative rimangono ancora da definire. Ma questo non comporta problemi particolari, ricordando la separazione effettuata tra gli autovalori positivi e negativi si ottiene infatti:

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2}^\pm = \mathbf{A}_{i+1/2}^\pm \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2} \quad (3.6.32)$$

Combinando insieme le (3.6.31) e (3.6.32) si ottiene il flusso numerico corrispondente allo schema upwind del primo ordine per il sistema considerato:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \left| \mathbf{A}_{i+1/2} \right| \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2} \right] \quad (3.6.33)$$

che si può esprimere anche come :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1,2} \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^k \right| \cdot \boldsymbol{\alpha}_{i+1/2}^k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^k \quad (3.6.34)$$

Nel caso in cui i punti $(i, i+1)$ si trovino agli estremi di una discontinuità che si propaga a velocità v_s , in virtù della relazione di Rankine-Hugoniot, si ottiene:

$$\delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = v_s \cdot \delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.6.35)$$

Questo implica che v_s sia un autovalore di $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}$ e $\delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}$ il suo autovettore corrispondente. Allora la matrice $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}$ è in grado di riconoscere la discontinuità, in questo caso l'informazione si propaga nella stessa direzione e la funzione del flusso si riduce a:

$$\begin{cases} F_{i+\frac{1}{2}}^* = F_i \text{ per } v_s > 0 \\ F_{i+\frac{1}{2}}^* = F_{i+1} \text{ per } v_s < 0 \end{cases} \quad (3.6.36)$$

Ciò è conseguenza del fatto che nella parete che separa le due celle i e $i+1$ si sta sostituendo alla parte omogenea dell'equazione (3.6.18) grazie all'approssimazione lineare la:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.6.37)$$

L'equazione (3.6.37) ammette discontinuità solo come soluzioni di un problema con discontinuità nelle condizioni iniziali, cioè riconosce le onde di shock ma non quelle di rarefazione.

Se è presente una discontinuità nei punti della maglia $(i, i+1)$, come nel caso di $V_s=0$ per cui $F_{i+1}=F_i$, la variazione di U_{i+1} e U_i è nulla. Per determinare anche in questo caso gli autovalori di $\mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}}$ senza generare discontinuità non accettabili si è studiata una soluzione semplice; si calcola prima la grandezza $\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^k$ definita come:

$$\varepsilon_{i+1/2}^k = \max \left[0, \left(\tilde{a}_{i+1/2}^k - a_i^k \right), \left(a_{i+1}^k - \tilde{a}_{i+1/2}^k \right) \right] \quad k = 1, 2 \quad (3.6.38)$$

che risulta nulla nel caso in cui nella cella $(i, i+1)$ si produca uno shock. Una volta ottenuta $\varepsilon_{i+1/2}^k$ si ridefinisce il modulo di ciascun autovalore di $\mathbf{A}_{i+1/2}$ secondo la :

$$\Psi_{i+1/2}^k = \begin{cases} \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| & \text{se } \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| \geq \varepsilon_{i+1/2}^k \\ \varepsilon_{i+1/2}^k & \text{se } \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| < \varepsilon_{i+1/2}^k \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (3.6.39)$$

essendo $\Psi_{i+1/2}^k$ il valore corretto del modulo di $\tilde{a}_{i+1/2}^k$

In questo modo il coefficiente di viscosità numerica non si annulla se le velocità caratteristiche passano per lo zero, e si evita di rappresentare questi punti come discontinuità.

E' interessante notare che lo Jacobiano costruito nel modo descritto risulta indipendente dalla forma della sezione del canale, in altre parole è definita per qualsiasi dipendenza funzionale della forma della sezione da h .

Nel primo codice di calcolo implementato durante il lavoro di tesi, che utilizza lo schema di Roe del primo ordine di precisione, le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto si sono discretizzate nel modo seguente:

Equazione di bilancio della massa

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* \right) \quad (3.6.40)$$

dove

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_i^+ + F_{i+1}^-}{2} = \frac{1}{2} (Q_{i+1}^n + Q_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i+1/2}^k \quad (3.6.41)$$

$$F_{i-1/2}^* = \frac{F_i^+ + F_{i-1}^-}{2} = \frac{1}{2} (Q_i^n + Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i-1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i-1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i-1/2}^k \quad (3.6.42)$$

e Δt è stato calcolato imponendo la condizione di stabilità del numero di CFL

Equazione di bilancio della quantità di moto

$$Q_i^{n+1} = \frac{\left(Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*) + g \cdot \Delta t \cdot A \cdot S_0 \right)}{\left(1 + g \cdot \Delta t \cdot \frac{n^2 \cdot |Q_j^n|}{A \cdot h^{4/3}} \right)} \quad (3.6.43)$$

dove

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_i^+ + F_{i+1}^-}{2} = \frac{1}{2} \left(\left(h_{i+1}^n \cdot u_{i+1}^{n2} + g \cdot \frac{h_{i+1}^{n2}}{2} \right) + \left(h_i^n \cdot u_i^{n2} + g \cdot \frac{h_i^{n2}}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i+1/2}^k \quad (3.6.44)$$

$$\begin{aligned}
 F_{i-1/2}^* &= \frac{F_i^+ + F_{i-1}^-}{2} = \\
 &\frac{1}{2} \left(\left(h_i^n \cdot u_i^{n^2} + g \cdot \frac{h_i^{n^2}}{2} \right) + \left(h_{i-1}^n \cdot u_{i-1}^{n^2} + g \cdot \frac{h_{i-1}^{n^2}}{2} \right) \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i-1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i-1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i-1/2}^k
 \end{aligned} \tag{3.6.45}$$

e per le perdite di carico si è utilizzata la relazione di Manning.

Date come condizioni al contorno di monte l'idrogramma della portata entrante nel dominio e come condizioni al contorno di valle una legge che lega il tirante alla portata (scala di deflusso, numero di Froude) e come condizioni iniziali il tirante idrico e la portata nei punti del dominio considerato si possono calcolare, implementando le espressioni (3.6.40) e (3.6.43) le portate, i tiranti e quindi le velocità nei punti della maglia in istanti di tempo successivi a quello iniziale.

3.7. Metodo di estrapolazione di variabili di tipo MUSCL

Il metodo di estrapolazione delle variabili di tipo MUSCL (Monotone Upstream Schemes for Conservation Laws) (Van Leer 1972) si può interpretare come una estensione di ordine superiore del metodo di Godunov (1961).

La soluzione numerica per gli U_i^n viene considerata, anziché costante a tratti, variabile linearmente nel volume di controllo. Viene introdotta quindi una correzione positiva o negativa al valor medio, ottenendo una $U_i^n(x)$ variabile all'interno della cella (vedi fig 3.3)

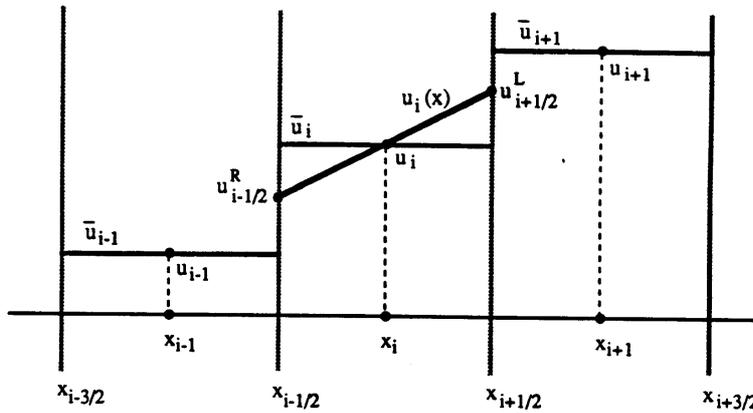


Figura 3.3 Estrapolazione delle variabili di tipo MUSCL

Nel caso di retta, la definizione della funzione locale $U_i(x)$ diventa:

$$U_i(x) = U_i + p_i \frac{x - x_i}{\Delta x} \quad x \in [x_{i-1/2}; x_{i+1/2}] \quad (3.7.1)$$

Essendo p_i proporzionale alla pendenza della retta, calcolata di una forma appropriata. A partire da essa si possono calcolare i valori negli estremi delle celle:

$$U_{i+1/2}^L = U_i + \frac{1}{2} p_i \quad (3.7.2)$$

$$U_{i-1/2}^R = U_i - \frac{1}{2} p_i \quad (3.7.3)$$

Consideriamo la differenziazione upwind della derivata spaziale del flusso, discretizzando separatamente le derivate spaziali e temporali; il flusso numerico dipende esclusivamente dalla differenza delle derivate spaziali e temporali. La forma esplicita risulta:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{A}^+ \left[U_i + \frac{1}{2} (U_i - U_{i-1}) \right] + \mathbf{A}^- \left[U_{i+1} - \frac{1}{2} (U_{i+2} - U_{i+1}) \right] \quad (3.7.4)$$

Le quantità tra parentesi quadre non sono altro che $U_{i+1/2}^L$ e $U_{i+1/2}^R$ per valori di p pari a

$$p_i^+ = \delta U_{i-1/2} = (U_i - U_{i-1}) \quad (3.7.5)$$

$$p_i^- = \delta U_{i+1/2} = (U_{i+1} - U_i) \quad (3.7.6)$$

Ne consegue che il flusso numerico del secondo ordine nello spazio può essere ottenuto dal flusso upwind del primo ordine solo sostituendo le quantità

$(\mathbf{U}_{i+1}; \mathbf{U}_i)$ con le $(\mathbf{U}_{i+1/2}^R; \mathbf{U}_{i+1/2}^L)$. L'estensione del flusso al secondo ordine di precisione si traduce nel:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^*(\mathbf{U}_{i+1/2}^R; \mathbf{U}_{i+1/2}^L) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) - |\mathbf{A}| (\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \right] \quad (3.7.7)$$

Linearizzando localmente l'equazione nei punti intermedi della rete il flusso numerico del secondo ordine per una equazione non lineare vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2}^*(\mathbf{U}_{i+1/2}^R; \mathbf{U}_{i+1/2}^L) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) - |\mathbf{A}_{RL}| (\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \right] \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

con la seguente definizione di velocità di convezione approssimata:

$$\mathbf{A}_{RL} = \begin{cases} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L)}{(\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L)} & \text{se } (\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L) \neq 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) = \mathbf{A}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) & \text{se } (\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L) = 0 \end{cases} \quad (3.7.9)$$

Il secondo ordine di accuratezza nel tempo può essere ottenuto con una schematizzazione a due passi del tipo predictor-corrector:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^* &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{U}_i^n + \mathbf{U}_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*) \right) \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Le grandezze negli stati intermedi U_R e U_L si calcolano come

$$\begin{aligned} U_L &= U_j + 0.5\delta U_j \\ U_R &= U_{j+1} - 0.5\delta U_{j+1} \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Gli incrementi δU_j e δU_{j+1} possono essere calcolati in vari modi. Ad esempio (Hirsch, 1990):

$$\delta U_j = \min i \operatorname{mod}(U_{j+1}^+ - U_j^+, U_j^+ - U_{j-1}^+) \quad (3.7.12)$$

$$\delta U_{j-1}^- = \min i \operatorname{mod}(U_{j+1}^- - U_j^-, U_{j+2}^- - U_{j+1}^-) \quad (3.7.13)$$

dove la funzione $\min i \operatorname{mod}$ è definita come:

$$\min i \operatorname{mod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } |a| < |b| \quad e \quad ab > 0 \\ b & \text{se } |b| < |a| \quad e \quad ab > 0 \\ 0 & \text{se } ab \leq 0 \end{cases} \quad (3.7.14)$$

3.8. Weighed Average Flux (WAV)

L'approccio WAF è una generalizzazione dello schema di Lax Wendroff e dello schema di Godunov del primo ordine upwind. Trae le sue origini nello schema Flux Random che è accurato al secondo ordine nello spazio e nel tempo (Toro 1999). L'approccio WAF porta ad uno schema del secondo ordine esplicito.

Il metodo WAF considera le $\{\mathbf{U}\}$ funzioni costanti a tratti come nel metodo di Godunov del primo ordine upwind calcolandole come media integrale della soluzione $\mathbf{U}(x, t)$ all'interno della cella $I_i = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2} \right]$ secondo la:

$$\mathbf{U}(x, t)^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t)^n dx \quad (3.8.1)$$

In pratica la definizione di $\mathbf{U}(x, t)^n$ non è necessaria. Le condizioni iniziali definiscono $\{\mathbf{U}(x, 0)\}$ come i valori medi nelle singole celle, e per gli istanti di tempo successivi queste medie vengono ricavate dalla

$$\mathbf{U}(x, t)^{n+1} = \mathbf{U}(x, t)^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2} \right] \quad (3.8.2)$$

Tutto ciò di cui si ha bisogno è la definizione del flusso numerico. Nella formulazione originale del metodo WAF il flusso all'interfaccia era definito come una media integrale della funzione flusso:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{WAF} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-0.5\Delta x}^{0.5\Delta x} \mathbf{F}\left(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(x, 0.5\Delta t)\right) dx \quad (3.8.3)$$

dove l'intervallo di integrazione va da metà cella I_i a metà cella I_{i+1} . L'integrando rappresenta la funzione del flusso valutata per $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(x, 0.5\Delta t)$, dove con $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(x, \Delta t)$ si indica la soluzione del problema di Riemann a partire dagli stati $\mathbf{U}(x_i, 0)$ $\mathbf{U}(x_{i+1}, 0)$

La versione più utilizzata nell'ambito delle Shallow Water Equation è la seguente:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{WAF} = \sum_{K=1}^{n+1} \theta_k \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \quad (3.8.4)$$

dove sono stati introdotti i pesi

$$\theta_k = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}) \text{ con } c_k = \frac{\Delta t \cdot S_k}{\Delta x} \text{ dove } c_0 = -1, c_{n+1} = 0$$

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(K)} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k \Delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^k \quad (3.8.5)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^k = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \quad (3.8.6)$$

Trattandosi di uno schema del secondo ordine nello spazio e nel tempo è di carattere oscillatorio, per questo motivo esiste la formulazione TVD che si riporta per completezza:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{segno}(c_k) \Delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^k \quad (3.8.7)$$

3.9. Solutori utilizzati

Nell'ambito della tesi di dottorato si è implementato un codice di calcolo del secondo ordine di accuratezza basato sull'estrapolazione delle variabili di tipo MUSCL e i risultati ottenuti con questo modello sono stati confrontati con quelli ottenuti con lo schema di Roe per un gran numero di prove sperimentali presenti in letteratura (vedi capitolo 6), per fare un'analisi più esaustiva possibile sul comportamento di schemi upwind di ordine diverso.

Le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto sono state discretizzate nei due passi di integrazione temporali nel modo seguente:

- **Primo passo temporale**

Equazione di bilancio della massa

$$h_i^\oplus = h_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot (F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i-\frac{1}{2}}^*) \quad (3.9.1)$$

dove

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{F_i^+ + F_{i+1}^-}{2} = \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_i^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} |\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k| \cdot \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k \cdot \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^k \quad (3.9.2)$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^* = \frac{F_i^+ + F_{i-1}^-}{2} = \frac{1}{2}(Q_i^n + Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} |\tilde{a}_{i-\frac{1}{2}}^k| \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^k \cdot \tilde{e}_{i-\frac{1}{2}}^k \quad (3.9.3)$$

Equazione di bilancio della quantità di moto

$$\begin{aligned}
 Q_i^{\oplus 2} \left(g \frac{\Delta t}{2} \frac{n^2}{A^* \cdot h^{4/3}} \right) + Q_i^{\oplus} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot \left(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* \right) \\
 + g \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot A^{\oplus} \cdot S_0 + g \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot I_2 = 0
 \end{aligned} \tag{3.9.4}$$

dove

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2}^* &= \frac{F_i^+ + F_{i+1}^-}{2} = \\
 &\frac{1}{2} \left(\left(h_{i+1}^n \cdot u_{i+1}^{n2} + g \cdot \frac{h_{i+1}^{n2}}{2} \right) + \left(h_i^n \cdot u_i^{n2} + g \cdot \frac{h_i^{n2}}{2} \right) \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i+1/2}^k
 \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

$$\begin{aligned}
 F_{i-1/2}^* &= \frac{F_i^+ + F_{i-1}^-}{2} = \\
 &\frac{1}{2} \left(\left(h_i^n \cdot u_i^{n2} + g \cdot \frac{h_i^{n2}}{2} \right) + \left(h_{i-1}^n \cdot u_{i-1}^{n2} + g \cdot \frac{h_{i-1}^{n2}}{2} \right) \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i-1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i-1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i-1/2}^k
 \end{aligned} \tag{3.9.6}$$

Nelle espressioni (3.9.1), (3.9.4) con il simbolo \oplus si sono indicate le variabili al primo istante temporale.

▪ **Secondo passo temporale**

Equazione di bilancio della massa

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* \right) \quad (3.9.7)$$

dove

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_i^+ + F_{i+1}^-}{2} = \frac{1}{2} \left(Q_{i+1}^\oplus + Q_i^\oplus \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i+1/2}^k \quad (3.9.8)$$

$$F_{i-1/2}^* = \frac{F_i^+ + F_{i-1}^-}{2} = \frac{1}{2} \left(Q_i^\oplus + Q_{i-1}^\oplus \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i-1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i-1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i-1/2}^k \quad (3.9.9)$$

Equazione di bilancio della quantità di moto

$$Q_i^{n+1/2} \left(g \Delta t \frac{n^2}{A^* \cdot h^{4/3}} \right) + Q_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* \right) + \quad (3.9.10)$$

$$g \cdot \Delta t A \cdot S_0 + g \cdot \Delta t \cdot I_2 = 0$$

dove

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2}^* &= \frac{F_i^+ + F_{i+1}^-}{2} = \\
 &\frac{1}{2} \left(\left(h_{i+1}^\oplus \cdot u_{i+1}^{\oplus 2} + g \cdot \frac{h_{i+1}^{\oplus 2}}{2} \right) + \left(h_i^\oplus \cdot u_i^{\oplus 2} + g \cdot \frac{h_i^{\oplus 2}}{2} \right) \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i+1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i+1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i+1/2}^k
 \end{aligned} \tag{3.9.11}$$

$$\begin{aligned}
 F_{i-1/2}^* &= \frac{F_i^+ + F_{i-1}^-}{2} = \\
 &\frac{1}{2} \left(\left(h_i^\oplus \cdot u_i^{\oplus 2} + g \cdot \frac{h_i^{\oplus 2}}{2} \right) + \left(h_{i-1}^\oplus \cdot u_{i-1}^{\oplus 2} + g \cdot \frac{h_{i-1}^{\oplus 2}}{2} \right) \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left| \tilde{a}_{i-1/2}^k \right| \cdot \alpha_{i-1/2}^k \cdot \tilde{e}_{i-1/2}^k
 \end{aligned} \tag{3.9.12}$$

In questo caso si è trattato in modo totalmente implicito il termine legato alla resistenza al moto, determinando una equazione di secondo grado nell'incognita Q .

Per le perdite di carico, le condizioni al contorno di monte e di valle e per le condizioni iniziali vale quello che è stato già detto nel paragrafo 3.6.3

3.10. Moto bidimensionale: discretizzazione spaziale ai volumi finiti

Le equazioni che governano il flusso a superficie libera in due dimensioni sono, come già descritto nel paragrafo 1.4,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (3.10.1)$$

dove il vettore delle incognite e le componenti cartesiane del flusso sono espresse dalle

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{gh^2}{2} \\ uvh \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.10.2)$$

nella espressione precedente h rappresenta il tirante idrico, u e v le componenti lungo le direzioni x ed y della velocità media, e g rappresenta l'accelerazione di gravità.

Il secondo membro della (3.10.1) rappresenta i termini sorgente, più precisamente tiene conto delle pendenza di fondo e delle perdite dovute alla resistenza al moto lungo le due direzioni coordinate, la sua discretizzazione sarà trattata con dettaglio nel capitolo 4.

Esprimendo il tensore del flusso come:

$$\mathbf{FG} = [\mathbf{F}, \mathbf{G}] \quad (3.10.3)$$

l'equazione (3.10.1) può essere scritta in forma divergente come:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{FG}) = \mathbf{S} \quad (3.10.4)$$

la sua espressione lungo un volume Ω fissato è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{FG}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (3.10.5)$$

Applicando il teorema della divergenza otteniamo, definendo con S la superficie che ingloba il volume Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_S (\mathbf{FG} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (3.10.6)$$

Il dominio di integrazione dovrà allora essere descritto da una maglia computazionale che definisca i volumi finiti Ω_{ij} essendo i e j gli indici nelle due direzioni coordinate della rete (Hirsch 1992) come in figura 3.4

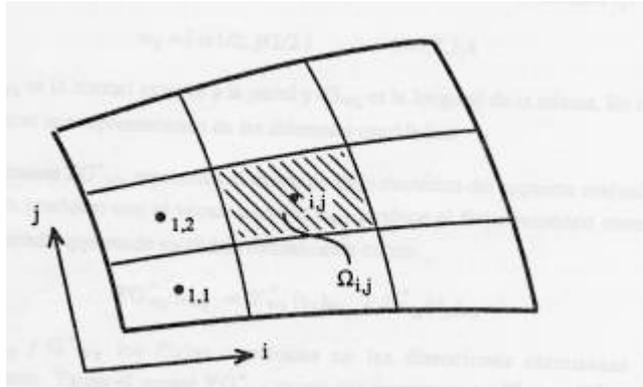


Figura 3.4-Definizione del dominio in volumi finiti

Ciascun volume di controllo è definito in funzione del suo baricentro al quale vengono assegnati i valori delle variabili idrauliche (tirante idrico) e cinematiche (portate e velocità lungo gli assi coordinati)

L'equazione 3.10.6 verrà applicata a ciascun volume finito e si indicheranno con $U_{i,j}$ i valori medi delle variabili associate al volume stesso. Essendo la maglia computazionale fissa nel tempo, l'espressione (3.10.6) potrà scriversi come:

$$\frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} \Omega_{i,j} + \oint_{S_{i,j}} (\mathbf{FG} \cdot \mathbf{n}) dS = S_{i,j} \Omega_{i,j} \quad (3.10.7)$$

che rappresenta l'equazione differenziale ordinaria che descrive l'evoluzione nel tempo delle variabili $U_{i,j}$ nella quale resta da definire l'integrale di superficie. Volendo seguire una trattazione del tutto generica e non legata alla forma e ai lati del volume di controllo, che si indicheranno con nl , l'integrale di superficie può essere approssimato da una sommatoria estesa ad nl :

$$\oint_{S_{i,j}} (\mathbf{FG} \cdot \mathbf{n}) dS = \sum_{k=1}^{nl} (\mathbf{FG}_{w_k} \cdot \mathbf{n}_{w_k}) dS_{w_k} \quad (3.10.8)$$

dove con w_k si è indicato l'indice corrispondente alla parete k -ma del volume finito, con \mathbf{n}_{w_k} la normale esterna alla parete k -ma del volume e con dS_{w_k} la lunghezza di tale parete.

L'espressione \mathbf{FG}_{w_k} rappresenta il tensore del flusso numerico dello schema scelto valutato sulla parete w_k . Il suo prodotto con la normale a tale parete rappresenta infatti la sua componente nella direzione ortogonale alla parete considerata, che può esprimersi come:

$$\mathbf{FG}_{w_k} \cdot \mathbf{n}_{w_k} = \mathbf{F}_{w_k} \cdot (n_x)_{w_k} + \mathbf{G}_{w_k} \cdot (n_y)_{w_k} \quad (3.10.9)$$

Per calcolare l'espressione (3.10.8) sono necessari esclusivamente i flussi numerici normali alle pareti del volume di controllo. La discretizzazione ai volumi finiti del sistema di equazioni di bilancio di massa e di quantità di moto nel caso 2D (SWE) può essere espresso, indicando con A_i l'area dell'elemento i -mo, dalla:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \left(\sum_{k=1}^{nl} (\mathbf{FG}_{w_k} \cdot \mathbf{n}_{w_k}) dS_{w_k} \right)_i + \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega \quad (3.10.10)$$

3.11. Descrizione dello schema numerico utilizzato: schema di Roe

In questo paragrafo si estende la trattazione già vista per il caso monodimensionale (paragrafo 3.6.1) al caso bidimensionale. Cominciamo con la descrizione del flusso numerico upwind adattato alla discretizzazione in volumi finiti.

La base dello schema upwind monodimensionale descritto nei paragrafi precedenti sta nella definizione dello Jacobiano approssimato del flusso, $\mathbf{A}_{i+1/2}$ su ciascuna parete delle celle di calcolo.

Una volta definita la matrice anzidetta, il flusso numerico, che nel caso monodimensionale è sempre ortogonale alla parete delle celle, è determinato dalla:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \left| \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} \right| \cdot \delta \mathbf{U}_{i+1/2} \right] \quad (3.11.1)$$

Il flusso numerico upwind bidimensionale si otterrà applicando l'espressione (3.11.1) a ciascuna parete della cella di calcolo, come mostrato in figura 3.5

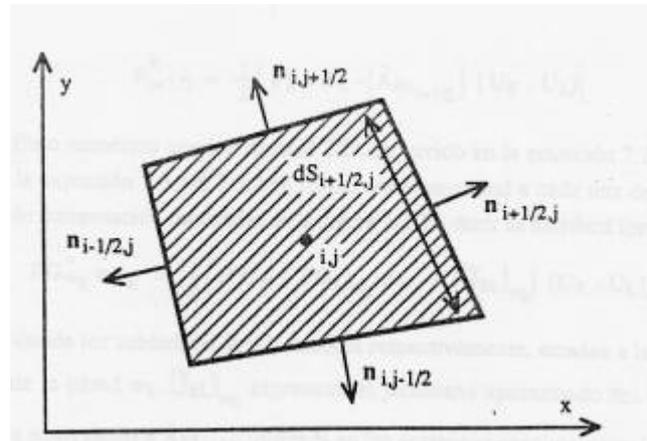


Figura 3.5-Volume finito nel piano xy

Formalmente si scriverà allora:

$$\mathbf{FG}_{w_k} \mathbf{n}_{w_k} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{FG}_R + \mathbf{FG}_L) \mathbf{n}_{w_k} - \left| (\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k} \right| \cdot (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)_{w_k} \right] \quad (3.11.2)$$

dove $k=1, nl$, utilizzando le notazioni definite in precedenza, e indicando rispettivamente con i pedici R e L le variabili presenti negli elementi presenti a destra e a sinistra della parete w_k , con $(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k}$ la matrice jacobiana approssimata del vettore del flusso normale alla parete, ed equivalente ad $(\tilde{\mathbf{A}}_{RL})_{w_k}$ nella formulazione monodimensionale, con $\left| (\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k} \right|$ la matrice i cui autovalori sono il modulo degli autovalori di $(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k}$.

Come per il caso monodimensionale la matrice jacobiana dovrà soddisfare alle seguenti condizioni:

1. $(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k}$ dipenderà esclusivamente da \mathbf{U}_R e \mathbf{U}_L
2. $(\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L)_{w_k} = (\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)_{w_k}$
3. $(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k}$ è una matrice di valori reali e distinti e tali sono i suoi autovettori
4. $(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k} = \mathbf{J}(\mathbf{U}_R) = \mathbf{J}(\mathbf{U}_L)$ se $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_L$

avendo indicato con $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ la matrice jacobiana del flusso normale esatto, che è definita come:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(\mathbf{F}\mathbf{G} \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} n_x + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} n_y = \mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y \quad (3.11.3)$$

Nella equazione (3.11.3) si è indicata con \mathbf{n} il vettore unitario normale alla parete considerata; con \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y le matrici jacobiane delle due componenti cartesiane del tensore del flusso, definite come:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (3.11.4)$$

Sostituendo la loro espressione nella equazione (3.11.3) si ottiene:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -u(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + c^2 n_x & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + u n_x & u n_y \\ -v(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + c^2 n_y & v n_x & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + v n_y \end{pmatrix} \quad (3.11.5)$$

avendo indicato con $\mathbf{u}=(u,v)$ e $c=\sqrt{gh}$. La matrice \mathbf{J} ammette come autovalori a^m :

$$\begin{aligned} a^1 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c = un_x + vn_y + c & a^2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = un_x + vn_y \\ a^3 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c = un_x + vn_y - c \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

e autovettori \mathbf{e}^m , ($m=1,3$):

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix} \quad (3.11.7)$$

Nello stesso modo è possibile definire autovalori ed autovettori della matrice $(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})_{w_k}$ che per comodità di notazione d'ora in avanti indicheremo solo come $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$. Si ammetterà che essa abbia la stessa forma di \mathbf{J} con la differenza che al posto delle variabili \mathbf{u} e c si avranno le $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ e \tilde{c} .

I suoi autovalori ed autovettori saranno:

$$\tilde{a}^1 = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \tilde{c} \quad \tilde{a}^2 = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad \tilde{a}^3 = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \tilde{c} \quad (3.11.8)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix} \quad (3.11.9)$$

Per definire le grandezze con la cediglia la differenza delle grandezze conservative può essere espressa in funzione degli autovettori di $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$ secondo la:

$$\delta \mathbf{U}_{RL} = (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) = \sum_{m=1}^3 \alpha_{RL}^m \tilde{\mathbf{e}}_{RL}^m \quad (3.11.10)$$

dalla quale si ottiene l'espressione dei coefficienti α_{RL}

$$\alpha_{RL}^{1,3} = \frac{\delta h_{RL}}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}} \left[\delta(hu)_{RL} n_x + \delta(hv)_{RL} n_y - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \delta h_{RL} \right] \quad (3.11.11a)$$

$$\alpha_{RL}^2 = \frac{1}{\tilde{c}} \left[(\delta(hv)_{RL} - \tilde{v} \delta(h)_{RL}) n_x - (\delta(hu)_{RL} - \tilde{u} \delta(h)_{RL}) n_y \right] \quad (3.11.12b)$$

Applicando la proprietà 2. Si ottiene l'equazione vettoriale:

$$\delta \mathbf{F}_{RL} = (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) = \sum_{m=1}^3 a_{RL}^m \alpha_{RL}^m \tilde{\mathbf{e}}_{RL}^m \quad (3.11.13)$$

Uguagliando il secondo e il terzo membro della (3.11.12) è possibile ottenere i valori delle tre grandezze con la cediglia, separando le variabili che dipendono da \tilde{c} da un lato e quelle che dipendono da $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ dall'altro, seguendo lo stesso procedimento del caso monodimensionale.

$$\tilde{c} = \sqrt{g \frac{(h_R + h_L)}{2}} \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R} u_R + \sqrt{h_L} u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} \quad \tilde{v} = \frac{\sqrt{h_R} v_R + \sqrt{h_L} v_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} \quad (3.11.14)$$

Abbiamo allora determinato univocamente la matrice $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$.

Analogamente al caso monodimensionale, uno schema upwind costruito su una matrice approssimata dei flussi può generare discontinuità idrauliche non spiegabili fisicamente. Per evitarlo è necessario introdurre la correzione di entropia, sostituendo agli autovalori della matrice $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$ con il modulo degli stessi. Una differenza con il caso monodimensionale sta nel fatto che estendendo la trattazione alle due dimensioni, non tutti gli autovalori sono legati ad onde di shock, in particolare non lo è l'autovalore \tilde{a}^2 corrisponde al trasporto lineare e legato a discontinuità tangenziali; quindi la correzione di entropia dovrà essere applicata solo ad \tilde{a}^1 e \tilde{a}^3 , ma non ad \tilde{a}^2 .

Nella parete che separa due celle si calcolerà prima la quantità:

$$\varepsilon_{RL}^k = \max\left[0, (\tilde{a}_{RL}^k - a_L^k), (\tilde{a}_R^k - a_{RL}^k)\right] \quad k=1,3 \quad (3.11.15)$$

che risulterà diversa da zero solamente nella regione in cui le caratteristiche divergono. Il modulo del primo e del terzo autovalore sarà allora sostituito dalla grandezza:

$$\psi_{RL}^k = \begin{cases} |\tilde{a}^k| & \text{se } |\tilde{a}^k| \geq \varepsilon_{RL}^k \\ \varepsilon_{RL}^k & \text{se } |\tilde{a}^k| < \varepsilon_{RL}^k \end{cases} \quad k=1,3 \quad (3.11.16)$$

Questo accorgimento aumenta la viscosità numerica dello schema nella quantità necessaria. La matrice $\left|\left(\tilde{\mathbf{J}}_{RL}\right)_{w_k}\right|$ si ridefinisce in modo tale che i suoi autovalori siano in modulo quelli di $\tilde{\mathbf{J}}_{RL}$ corretti tramite la 3.11.15, cioè:

$$|(\tilde{\mathbf{J}}_{RL})| = \tilde{\mathbf{\Pi}} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{RL}^1 & 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{a}_{RL}^2| & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{RL}^3 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Pi}}^{-1} \quad (3.11.17)$$

dove con $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ e $\tilde{\mathbf{\Pi}}^{-1}$ si sono indicate le matrici che diagonalizzano \mathbf{J} ($\text{diag}(a^m) = \tilde{\mathbf{\Pi}}^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}$) e che valgono, rispettivamente:

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u + cn_x & -cn_y & u - cn_x \\ v + cn_y & cn_x & v - cn_y \end{pmatrix} \quad (3.11.17a)$$

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & n_x & n_y \\ 2(un_y - vn_x) & -2n_y & 2n_x \\ c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & -n_x & -n_y \end{pmatrix} \quad (3.11.18b)$$

La condizione di stabilità di uno schema bidimensionale è legata al numero di Courant, come già visto per il caso monodimensionale (vedi par. 3.4). Nel nostro caso il passo di integrazione temporale è stato calcolato adottando una formulazione che si sposa bene con la discretizzazione ai volumi finiti (Alcrudo e Garcia Navarro, 1993) :

$$\Delta t \leq CFL \frac{\min\{dr_{ij}\}}{\max\left\{\left(c + \sqrt{[u^2 + v^2]}\right)_{i,j}\right\}} \quad (3.11.19)$$

dove con dr_{ij} si sono indicate le distanze del baricentro dell'elemento considerato con i baricentri degli elementi contigui.

Capitolo 4

Trattamento dei termini sorgente

4.1. Introduzione

Il secondo membro delle equazioni mono e bidimensionali 2.2.1 e 2.3.1, che si è indicato con \mathcal{S} è detto termine sorgente. Esso tiene in conto, se ci si riferisce al caso monodimensionale delle variazioni della sezione trasversale, della resistenza al moto e della pendenza di fondo; se ci si riferisce al caso bidimensionale, perdendo l'informazione relativa alla sezione trasversale, delle resistenze al moto e delle pendenze del fondo nelle due direzioni coordinate.

Il trattamento del termine \mathcal{S} , inteso come scelta della sua discretizzazione, gioca un ruolo molto importante nel comportamento di uno schema numerico. Nel lavoro svolto durante la tesi si è analizzato con molta attenzione e dettaglio questo aspetto, perché si è visto come una scelta oculata possa portare dei miglioramenti nel comportamento di uno schema che possono risultare maggiori rispetto a quelli che si ottengono aumentando l'accuratezza dello schema stesso, che comporta inoltre oneri computazionali più elevati.

Divideremo ora per maggior chiarezza in due sezioni diverse il caso monodimensionale e quello bidimensionale.

4.2. Caso monodimensionale

Riprendiamo l'equazione 2.2.1. Il termine \mathcal{S} è costituito dai tre contributi precedentemente esposti:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

Sono tre le discretizzazioni del termine sorgente nella schematizzazione monodimensionale che si sono studiati, applicati e confrontati durante la tesi:

- I. il trattamento pointwise (Brufau et al, 2000);
- II. il trattamento centrato (Nuijc 1995);
- III. il trattamento upwind (Garcia Navarro and Vasquez-Cendon, 2000)

4.2.1. Trattamento pointwise

Rappresenta il modo più intuitivo e semplice di schematizzare il termine sorgente, che però non risulta molto efficace, soprattutto se applicato allo schema di Roe, in casi di interesse applicativo come nella simulazione di pelo liquido orizzontale in presenza di acqua ferma con brusche variazioni della pendenza di fondo. In questo caso lo schema di Roe a causa delle differenze di tirante idrico (ma non di quota assoluta) tra due sezioni successive genera delle correzioni al flusso numerico diverso da zero nelle 3.3.34 che determinano

portate non nulle che a loro volta creano oscillazioni nel livello del pelo liquido.

La pendenze di fondo e la spinta sul contorno sono discretizzate utilizzando le variabili calcolate nei punti della griglia con uno schema centrato (Valiani e Schippa 2002):

$$S_{0i} = -\frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2\Delta x} \quad I_2 = \frac{\Sigma_{i+1} - \Sigma_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4.2.2)$$

dove con Σ si è indicata la spinta statica. La cadente, espressa secondo Manning, è scritta in forma implicita della portata;

$$S_{f_i}^n = \frac{n^2 Q_i^{n+1} |Q_i^{n+1}|}{A_i^n R_i^{n^{4/3}}} \quad (4.2.3)$$

4.2.2. Trattamento centrato

Questo approccio è stato ideato da Nuijce già dal 1995 (Nuijce 1995) e si basa sull'idea di estrarre dalle funzioni dei flussi \mathbf{F} il termine I_f e discretizzarlo in modo tale da renderlo compatibile con il termine dipendenza di fondo.

Le equazioni delle acque basse possono allora essere scritte come:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \mathbf{S} = 0 \quad (4.2.4)$$

dove il vettore dei flussi \mathbf{F} è stato diviso nei due vettori \mathbf{G} e \mathbf{P} che valgono, rispettivamente:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} Q \\ Q^2 \\ A \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_1 \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

Il vettore \mathbf{P} viene poi discretizzato secondo la:

$$\mathbf{P}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1}) \quad (4.2.6)$$

così come il termine di pendenza di fondo:

$$S_{0i} = \frac{1}{2}g(h_{i+1} + h_{i-1})\frac{(z_{i+1} - z_{i-1})}{2\Delta x} \quad (4.2.7)$$

In questo modo si riesce a simulare con il solutore di Roe in condizioni stazionarie la situazione di pelo liquido orizzontale anche in presenza di variazioni della pendenza di fondo non aggiungendo nessun tipo di termine sorgente artificiale alla soluzione numerica, come invece accade con il trattamento upwind (vedi par 4.2.3)

4.2.3. Trattamento upwind

La discretizzazione upwind del termine sorgente è stata ideata recentemente (Garcia Navarro e Vasquez Cendon 2000) e si basa sull'intuizione di trattare il termine sorgente così come i flussi numerici di uno schema upwind, utilizzando cioè una combinazione lineare con gli autovettori \mathbf{e}^k della matrice Jacobiana del flusso, in modo tale da bilanciare le correzioni upwind dei flussi numerici. La trattazione che segue è stata sviluppata e quindi risulta valida solo per sezioni trasversali rettangolari.

Dato il sistema di equazioni differenziali 2.2.1, che riportiamo per completezza:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) \quad (4.2.8)$$

la discretizzazione dell'equazione omogenea associata può essere espressa come:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^* \right) \quad (4.2.9)$$

o nella forma:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} + \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\sum_{k+} a_k \alpha_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-1/2} + \left(\sum_{k-} a_k \alpha_k \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+1/2} \right] = 0 \quad (4.2.10)$$

dove i pedici $k+$ e $k-$ indicano le grandezze nelle interfaccia positive e negative.

Allo stesso modo si può schematizzare il termine sorgente come:

$$\mathbf{S} \cdot \Delta x = \sum_k \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (4.2.11)$$

In questo modo la perturbazione che influenza il valore delle variabili nei nodi modifica non solo i flussi numerici ma anche il termine sorgente attraverso il segno delle velocità di propagazione della perturbazione (autovalore), e la discretizzazione del sistema diventa:

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_i^{n+1} + \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{k^+} (a_k \alpha_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i-1/2} \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{k^-} (a_k \alpha_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k \right)_{i+1/2} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

I termini sorgente che influenzano la soluzione nel nodo i sono dovuti ai contributi delle celle destra e sinistra. La discretizzazione upwind determina l'ammontare di questi due contributi. L'equazione 4.2.11 può essere riscritta come:

$$\mathbf{S} \cdot \Delta x = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \quad (4.2.13)$$

dove

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

Introducendo la notazione:

$$a^\pm = \frac{1}{2} (a \pm |a|) \quad (4.2.15)$$

il contributo alla soluzione del punto i può essere espresso come somma di due contributi ϕ_L e ϕ_R .

Su una maglia uniforme si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \Delta x &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{2} (\boldsymbol{\Psi}_L)_{i-1/2} + \frac{\Delta x}{2} (\boldsymbol{\Psi}_R)_{i+1/2} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left((\mathbf{H}_L \boldsymbol{\beta})_{i-1/2} + (\mathbf{H}_R \boldsymbol{\beta})_{i+1/2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

dove, introducendo il segno degli autovalori s_k

$$\mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} 1+s_1 & 1+s_2 \\ a_1(1+s_1) & a_2(1+s_2) \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} 1-s_1 & 1-s_2 \\ a_1(1-s_1) & a_2(1-s_2) \end{pmatrix} \quad (4.2.17)$$

da cui

$$\boldsymbol{\Psi}_L = \boldsymbol{\beta} \mathbf{H}_L = \boldsymbol{\beta} \begin{pmatrix} 1+s_1 & 1+s_2 \\ a_1(1+s_1) & a_2(1+s_2) \end{pmatrix} \quad (4.2.18a)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_R = \boldsymbol{\beta} \mathbf{H}_R = \boldsymbol{\beta} \begin{pmatrix} 1-s_1 & 1-s_2 \\ a_1(1-s_1) & a_2(1-s_2) \end{pmatrix} \quad (4.2.18b)$$

Si sostituiscono allora le (4.2.18a) e (4.2.18b) nella (4.2.16) per ottenere:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \Delta x &= \boldsymbol{\beta}_{i-1/2} \begin{pmatrix} 1+s_1 & 1+s_2 \\ a_1(1+s_1) & a_2(1+s_2) \end{pmatrix}_{i-1/2} \\ &+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_{i+1/2} \begin{pmatrix} 1-s_1 & 1-s_2 \\ a_1(1-s_1) & a_2(1-s_2) \end{pmatrix}_{i+1/2} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Tornando all'espressione dei termini sorgente:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \left(-\tilde{A}\tilde{Z}_x - \tilde{A}\tilde{S}_f + \frac{A^2}{2b^2}b_x \right) \end{pmatrix} \quad (4.2.20)$$

questa potrà essere discretizzata come combinazione lineare degli autovettori e dei coefficienti β

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g \left(-\tilde{A}\tilde{Z}_x - \tilde{A}\tilde{S}_f + \frac{A^2}{2b^2}b_x \right) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ u+c \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ u-c \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1(u+c) + \beta_2(u-c) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Dalla espressione appena scritta si deducono i valori dei coefficienti β

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\beta_2 = \beta \\ \beta &= \frac{\Delta x}{2\tilde{c}} g \left(-\tilde{A}\tilde{Z}_x - \tilde{A}\tilde{S}_f + \frac{A^2}{2b^2}b_x \right) \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

La scelta delle grandezze all'interfaccia dovrà essere oculata, infatti in funzione di essa si potrà verificare o meno la condizione di pelo liquido orizzontale nel caso di stato stazionario e in presenza di variazioni della quota del fondo.

Consideriamo allora il caso stazionario:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n \rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^* \right) = 0 \quad (4.2.23)$$

La discretizzazione dei flussi secondo lo schema di Roe, come già accennato in precedenza, non è tale da annullare il secondo membro della espressioni, ma determina un residuo che dovrà essere annullato dalla schematizzazione del termine sorgente.

Riprendendo l'espressione 3.6.41 i flussi numerici che compaiono nell'equazione di bilancio della massa sono:

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[F_{i+1} + F_i - \sum_k \alpha_k |\mathbf{a}_k| \mathbf{e}^k \right] \quad (4.2.24.a)$$

$$F_{i-1/2}^* = \frac{1}{2} \left[F_i + F_{i-1} - \sum_k \alpha_k |\mathbf{a}_k| \mathbf{e}^k \right] \quad (4.2.24.b)$$

dove i termini presenti al secondo membro sono già stati illustrati nel capitolo 3.

Nel caso stazionario partendo dalla situazione di pelo liquido orizzontale ($Q=0, u=0, h=cost$) le equazioni 4.2.24a e b si riducono alle:

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[F_{i+1} + F_i - \sum_k \alpha_k |\mathbf{a}_k| \mathbf{e}^k \right] = -\frac{1}{2} (\mathbf{a}_1 \alpha_1 + \mathbf{a}_2 \alpha_2)_{j+1/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{A_{i+1} - A_i}{2} \right) \tilde{c}_{i+1/2} \left| \cdot \right| + \left(\frac{A_{i+1} - A_i}{2} \right) \tilde{c}_{i+1/2} \left| \cdot \right| \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{c}_{i+1/2} (A_{i+1} - A_i) \end{aligned} \quad (4.2.25a)$$

$$\begin{aligned}
 F_{i-1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[F_i + F_{i-1} - \sum_k \alpha_k |\mathbf{a}_k| \mathbf{e}^k \right] = -\frac{1}{2} (\mathbf{a}_1 \alpha_1 + \mathbf{a}_2 \alpha_2)_{j-1/2} = \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{A_i - A_{i-1}}{2} \right) \left| \tilde{c}_{i-1/2} \right| + \left(\frac{A_i - A_{i-1}}{2} \right) \left| -\tilde{c}_{i-1/2} \right| \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \tilde{c}_{i-1/2} (A_i - A_{i-1})
 \end{aligned} \tag{4.2.25b}$$

che, sostituite nella 4.2.23, portano alla

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{j+1/2}^* - \mathbf{F}_{j-1/2}^* \right) &= \\
 &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{A_{j+1} - A_j}{2} \right) \left| \tilde{c}_{j+1/2} \right| + \left(\frac{A_j - A_{j-1}}{2} \right) \left| \tilde{c}_{j-1/2} \right| \right] = \\
 &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\left(-\tilde{c}_{j+1/2} \Delta A \right)_{j+1/2} + \left(\tilde{c}_{j-1/2} \Delta A \right)_{j+1/2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Andando a sostituire i valori di β definiti dalla eq (4.2.22) nella (4.2.19) si ottiene, essendo $s_1=1$ ed $s_2=-1$

$$\begin{aligned}
 \Psi_L = \beta \mathbf{H}_L &= \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a_1(2) & a_2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2a_1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= 2 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta a_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_R = \beta \mathbf{H}_R &= \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ a_1(0) & a_2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2a_2 \end{pmatrix} = \\
 &= 2 \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\beta \\ -\beta a_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

si ottiene:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\Delta x} \left(2 \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \cdot a_1 \end{pmatrix}_{i-1/2} + 2 \begin{pmatrix} -\beta \\ -\beta \cdot a_2 \end{pmatrix}_{i+1/2} \right) = \quad (4.2.29)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} \beta_{i-1/2} - \beta_{i+1/2} \\ -\beta_{i-1/2} a_{i-1/2}^1 - \beta_{i+1/2} a_{i+1/2}^2 \end{pmatrix}$$

Scegliendo opportunamente le grandezze all'interfaccia nella eq (4.2.20) e precisamente:

$$\tilde{A} = \tilde{b}\tilde{h} \quad \tilde{h}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(h_{i+1} + h_i) \quad \tilde{b}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(b_{i+1} + b_i) \quad (4.2.30)$$

i valori corretti dei β saranno dati dall'espressione:

$$\beta_{i+1/2} = \frac{g}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \left(-\frac{1}{4}(b_{i+1} + b_i)(h_{i+1} + h_i)(z_{i+1} - z_i) \right) +$$

$$\frac{g}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \left(-\frac{1}{4}(b_{i+1} + b_i)(h_{i+1} + h_i)(X_{i+1} - X_i)Q_i|Q_i S_{f_i} \right) \quad (4.2.31)$$

$$+ \frac{g}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \frac{1}{4}(h_{i+1} + h_i)^2(b_{i+1} + b_i)$$

che, sostituita nella (4.2.29) porta all'uguaglianza con la (4.2.26); si ottiene cioè l'uguaglianza della prima riga della matrice dei residui dei flussi e dei termini sorgenti con la schematizzazione upwind. E' da notare che l'espressione (4.2.31) differisce dalla (4.2.22) per un fattore 0.5 nella scrittura dell'ultimo termine che tiene in conto della spinta sul contorno. In questo modo utilizzando

le medie aritmetiche (4.2.30) è possibile simulare la condizione di stato stazionario. Sarà allora rispettato il bilancio di massa e si riuscirà a ricostruire la situazione di pelo liquido orizzontale in caso di topografie complesse in condizioni di stato stazionario, con delle oscillazioni dei valori delle portate.

Si può ragionare in maniera analoga considerando l'equazione di bilancio di quantità di moto. Nel caso stazionario, se si parte dalla condizione di pelo liquido orizzontale, e se si considera una geometria rettangolare, le espressioni dei flussi numerici di Roe all'interfaccia saranno le seguenti:

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[F_{i+1} + F_i - \sum_k \alpha_k |a_k| e^k \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{gh^2 b_{i+1}}{2} + \frac{gh^2 b_i}{2} \right] \\
 &- \frac{1}{2} \left[\left(\frac{A_{i+1} - A_i}{2} \right) \left| \tilde{c}_{i+1/2} \right| \cdot \tilde{c}_{i+1/2} - \left(\frac{A_{i+1} - A_i}{2} \right) \left| -\tilde{c}_{i+1/2} \right| \cdot \left(-\tilde{c}_{i+1/2} \right) \right] \quad (4.2.32) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{gh^2 b_{i+1}}{2} + \frac{gh^2 b_i}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{i-1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[F_i + F_{i-1} - \sum_k \alpha_k |a_k| e^k \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{gh^2 b_i}{2} + \frac{gh^2 b_{i-1}}{2} \right] \\
 &- \frac{1}{2} \left[\left(\frac{A_i - A_{i-1}}{2} \right) \left| \tilde{c}_{i-1/2} \right| \cdot \tilde{c}_{i-1/2} - \left(\frac{A_i - A_{i-1}}{2} \right) \left| -\tilde{c}_{i-1/2} \right| \cdot \left(-\tilde{c}_{i-1/2} \right) \right] \quad (4.2.33) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{gh^2 b_i}{2} + \frac{gh^2 b_{i-1}}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Il residuo dell'equazione di bilancio di quantità di moto varrà allora:

$$\begin{aligned}
F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* &= \frac{1}{2} \left[\frac{gh_{i+1}^2 b_{i+1}}{2} + \frac{gh_i^2 b_i}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{gh_i^2 b_i}{2} + \frac{gh_{i-1}^2 b_{i-1}}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{gh_{i+1}^2 b_{i+1}}{2} + \frac{gh_{i-1}^2 b_{i-1}}{2} \right]
\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

per lo stesso ragionamento già svolto per l'equazione di bilancio della massa, se si vuole riprodurre la portata costante e pari a zero questo residuo dovrà essere annullato dalla combinazione lineare dei β con gli autovettori \mathbf{e} , cioè:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{gh_{i+1}^2 b_{i+1}}{2} + \frac{gh_{i-1}^2 b_{i-1}}{2} \right] = \beta_{i-1/2} \tilde{\mathbf{e}}_{i-1/2}^1 + \beta_{i+1/2} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^2 \tag{4.2.35}$$

Per far questo si sceglie di esprimere i valori che compaiono nella come medie geometriche che determinano quindi i coefficienti β espressi dalle:

$$\begin{aligned}
\beta_{i+1/2} &= \frac{g}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \left(-\frac{1}{4} (b_{i+1} h_{i+1} + b_i h_i) (z_{i+1} - z_i) \right) + \\
&\frac{g}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \left(-\frac{1}{4} (b_{i+1} h_{i+1} + b_i h_i) (X_{i+1} - X_i) |Q_i| Q_i S_f \right)_i \\
&+ \frac{g}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \left(\frac{1}{4} (h_{i+1} b_{i+1} + b_i h_i)^2 (b_{i+1} - b_i) \right)
\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{i-1/2} = & \frac{g}{2\tilde{c}_{i-1/2}} \left(-\frac{1}{4} (b_{i-1}h_{i-1} + b_i h_i) (z_i - z_{i-1}) \right) + \\
 & \frac{g}{2\tilde{c}_{i-1/2}} \left(-\frac{1}{4} (b_i h_i + b_{i-1} h_{i-1}) (X_i - X_{i-1}) |Q_i| |Q_i S_{f_i}| \right) \quad (4.2.37) \\
 & + \frac{g}{2\tilde{c}_{i-1/2}} \left(\frac{1}{4} (h_i b_i + b_{i-1} h_{i-1})^2 (b_i - b_{i-1}) \right)
 \end{aligned}$$

Adottando questo procedimento si mantiene la portata costante e pari a zero nel caso stazionario appena citato, non verificando però il bilancio di massa; questo implica delle oscillazioni del pelo liquido. Per ovviare a questo inconveniente si può utilizzare la media aritmetica per l'equazione di bilancio della massa e quella geometrica per l'equazione di bilancio della quantità di moto, soddisfacendo ad entrambe le condizioni. Nella figura 4.1 è riportato la condizione di pelo liquido orizzontale che si stabilisce dopo 300 secondi di simulazione utilizzando la doppia scrittura dei coefficienti β (4.2.31 e 4.2.37) che verificano sia il bilancio di massa che quello di quantità di moto, nel caso di geometria estremamente irregolare, sia per quanto riguarda la quota di fondo sia per la variazione di sezioni trasversali (vedi figura 4.2)

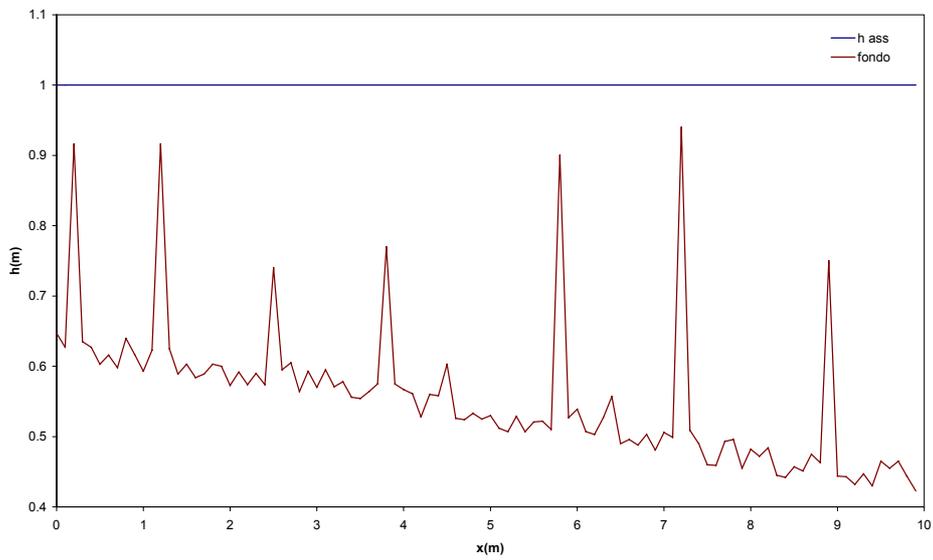


Figura 4.1- Profilo longitudinale in condizioni stazionaria (t=300 s)

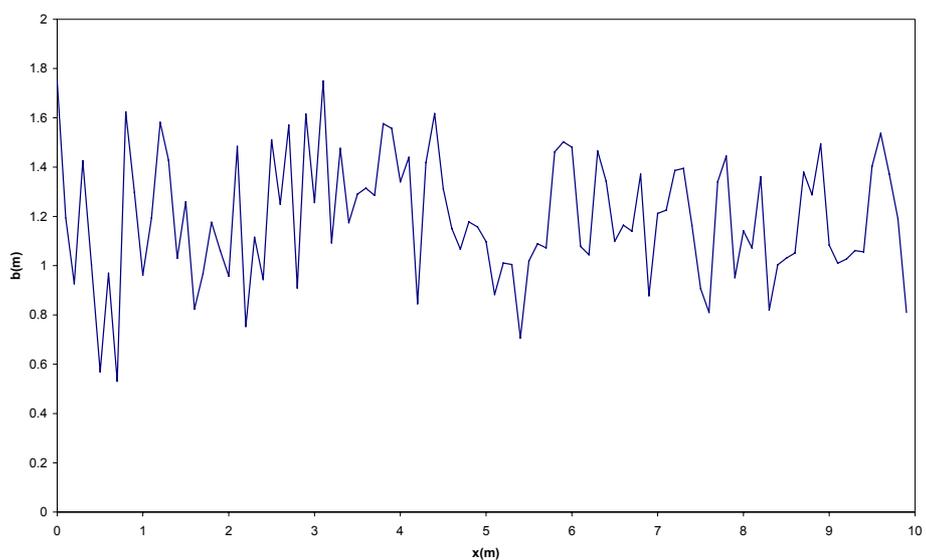


Figura 4.2-Variazioni delle sezioni trasversali test in stato stazionario

4.3. Caso bidimensionale

Riprendiamo l'equazione 2.2.1. e riportiamo l'espressione del termine sorgente

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ gh(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

determinato dalle pendenze di fondo e resistenze al moto nelle direzioni dei due assi coordinati.

Per il termine di resistenza al moto lungo i due assi coordinati si è adottata l'espressione secondo Manning scritta in forma semi implicita nella portata:

$$S_{f_{xi}}^n = \frac{n^2 q_{xi}^{n+1} |Q_i^{n+1}|}{h_i^{n^{7/3}}} \quad S_{f_{yi}}^n = \frac{n^2 q_{yi}^{n+1} |Q_i^{n+1}|}{h_i^{n^{7/3}}} \quad (4.3.2)$$

Per quanto riguarda il termine di pendenza di fondo, che si può esprimere come:

$$S_{0_x} = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad S_{0_y} = -\frac{\partial z}{\partial y} \quad (4.3.4)$$

durante il lavoro di tesi si sono analizzati i seguenti due approcci:

- Trattamento Pointwise (Alcrudo 1992)
- Trattamento Upwind (Brufau et al 2002)

Come già espresso in precedenza per il caso monodimensionale, il primo approccio è il più semplice mentre il secondo, anche se concettualmente più complesso, permette di ricostruire anche con lo schema numerico di Roe la soluzione in stato stazionario con pelo liquido orizzontale in presenza di variazioni della pendenza di fondo.

4.3.1. Trattamento Centrato della pendenza di fondo

E' necessario distinguere due casi:

- elementi triangolari
- elementi quadrangolari

Nel primo caso, essendo facile la determinazione del piano che passa per i tre nodi (come in figura 4.1)

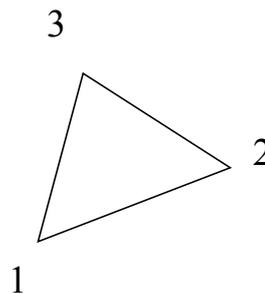


Figura 4.1 –Cella di calcolo triangolare

Risolvendo la

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.5)$$

si trova l'espressione canonica del piano $ax + by + cz + d = 0$:
dove i coefficienti a, b, c, d saranno determinati dalle:

$$a = y_1z_2 + z_1y_3 + y_2z_3 - y_3z_2 - y_2z_1 - y_1z_3 \quad (4.3.6)$$

$$b = -(x_1z_2 + x_2z_3 + x_3z_1 - x_3z_2 - x_2z_1 - x_1z_3) \quad (4.3.7)$$

$$c = x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 \quad (4.3.8)$$

$$d = -(x_1y_2z_3 + y_1x_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2) \quad (4.3.9)$$

La pendenza del fondo lungo le due direzioni x ed y sarà allora espressa dalle seguenti equazioni:

$$S_{0x} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{a}{c} = \frac{y_1z_2 + z_1y_3 + y_2z_3 - y_3z_2 - y_2z_1 - y_1z_3}{x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3} \quad (4.3.10)$$

$$S_{0y} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{b}{c} = \frac{x_1z_2 + z_1x_3 + x_2z_3 - x_3z_2 - x_2z_1 - x_1z_3}{x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3} \quad (4.3.11)$$

La quota del baricentro del triangolo potrà essere facilmente determinata dall'equazione del piano una volta sostituita ad essa le coordinate planimetriche dello stesso:

$$z_g = \frac{-ax_g - by_g - d}{c} \quad (4.3.12)$$

Nel secondo caso, si opera una scomposizione dell'elemento in 4 triangoli determinati dai vertici presi a due a due con il baricentro dell'elemento.

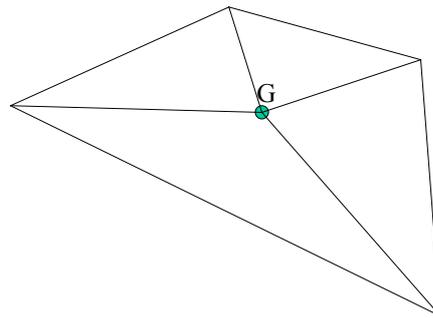


Figura 4.2-Elemento quadrangolare

Si calcola la quota del baricentro come media pesata delle quote dei singoli vertici dello stesso con pesi inversamente proporzionali alle distanze tra il singolo vertice e il centro della cella:

$$z_g = \frac{z_1d_1 + z_2d_2 + z_3d_3 + z_4d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \quad (4.3.13)$$

Una volta suddiviso il volume in 4 triangoli, è immediato calcolare il piano che passa per ciascuno di essi, come già accennato nelle eq.4.3.5 e seguenti, e quindi determinare la pendenza locale del fondo nelle due direzioni, per ciascuno dei quattro triangoli, come espresso dalle 4.3.10 e 4.3.11.

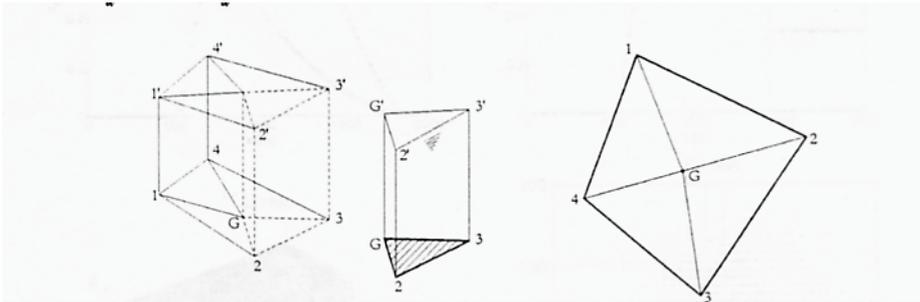


Figura 4.3-Scomposizione del prisma a base quadrangolare in 4 prismi a base triangolare

L'integrale dei termini sorgente dovuti alla sola pendenza del fondo si calcola allora ipotizzando che la quota della superficie libera z_w sia unica nella cella e in particolare coincida con quella in corrispondenza del baricentro secondo la (Valiani et al 2000):

$$\int_V S_{0_x} dV = g(z_w - z_G) \sum_{k=1,4} S_{0_{xk}} V_k \quad \int_V S_{0_y} dV = g(z_w - z_G) \sum_{k=1,4} S_{0_{yk}} V_k \quad (4.3.14)$$

avendo esteso la sommatoria ai 4 triangoli ottenuti dal quadrilatero (figura 4.3) e avendo indicato con V_k i volumi dei prismi a basi triangolari non parallele, come si vede in figura 4.4:

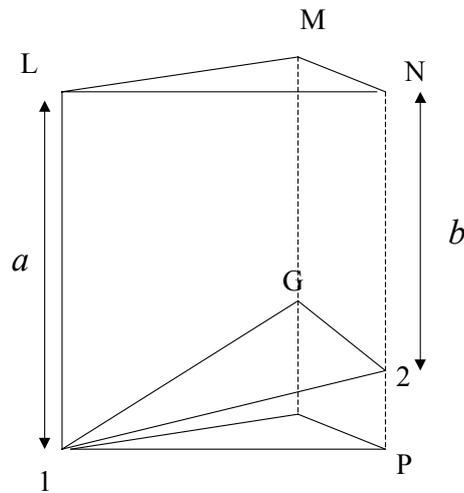


Figura 4.4-Prisma a base triangolare

4.3.2. Trattamento upwind

La trattazione nel caso bidimensionale risulta analoga a quello monodimensionale, già illustrato nel paragrafo 4.2.3, viene comunque riportata per completezza e perché risulta più onerosa rispetto al caso 1D. L'idea alla base è quella di inserire il termine sorgente nella schematizzazione upwind dei flussi, inserendo la combinazione lineare degli autovettori. Se si riprende l'eq. 3.11.10

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \cdot \frac{1}{2} \left[\sum_j (\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L)_j \cdot \mathbf{n} - \sum_{k=1}^3 \alpha_k |\tilde{a}_k| \tilde{\mathbf{e}}_k \right] dl_j \quad (4.3.15)$$

La tecnica di trattamento upwind del termine sorgente è adottata solamente per il termine di pendenza del fondo (\mathbf{S}^f) perché il termine di resistenza al moto

non dipende dalla scelta di discretizzazione del flusso numerico non dipendendo dalle alcuna derivata spaziale nel campo di moto;

$$S = S^1 + S^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_{0x} \\ ghS_{0y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix} \quad (4.3.16)$$

Introducendo la combinazione lineare del termine di pendenza di fondo con gli autovettori e^k già espressi dalle 3.10.7 ed uguagliandolo al termine S^l si ottiene:

$$\begin{aligned} \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \cdot n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c} \cdot n_y \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{c} \cdot n_y \\ \tilde{c} \cdot n_x \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \cdot n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c} \cdot n_y \end{pmatrix} = \\ \rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 \\ \beta_1(\tilde{u} + \tilde{c} \cdot n_x) + \beta_2(-\tilde{c} \cdot n_y) + \beta_3(\tilde{u} - \tilde{c} \cdot n_x) \\ \beta_1(\tilde{v} + \tilde{c} \cdot n_y) + \beta_2(\tilde{c} \cdot n_x) + \beta_3(\tilde{v} - \tilde{c} \cdot n_y) \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -\beta_3 = \beta \\ \beta(\tilde{u} + \tilde{c} \cdot n_x) + \beta_2(-\tilde{c} \cdot n_y) - \beta(\tilde{u} - \tilde{c} \cdot n_x) \\ \beta(\tilde{v} + \tilde{c} \cdot n_y) + \beta_2(\tilde{c} \cdot n_x) + \beta(\tilde{v} - \tilde{c} \cdot n_y) \end{array} \right. \quad (4.3.17) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = -\beta_3 = \beta \\ 2\beta\tilde{c} \cdot n_x - \beta_2\tilde{c} \cdot n_y \\ 2\beta\tilde{c} \cdot n_y + \beta_2\tilde{c} \cdot n_x \end{array} \right. \quad (4.3.18)$$

Il sistema di 3 equazioni in 3 incognite si riduce ad un sistema di 2 per 2

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{c}n_x & -\tilde{c}n_y \\ 2\tilde{c}n_y & \tilde{c}n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\tilde{h}\Delta z_x \\ g\tilde{h}\Delta z_y \end{bmatrix} \quad (4.3.19)$$

dove valgono le:

$$\Delta z_x = (z_R - z_L)\cos n_x \quad \Delta z_y = (z_R - z_L)\cos n_y \quad (4.3.20)$$

che, risolto con la regola di Cramer diventa:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \det \begin{bmatrix} g\tilde{h}\Delta z_x & -\tilde{c}n_y \\ g\tilde{h}\Delta z_y & \tilde{c}n_x \end{bmatrix} = \tilde{c}n_x g\tilde{h}\Delta z_x + \tilde{c}n_y g\tilde{h}\Delta z_y \\ &= \tilde{c}g\tilde{h}\Delta z (\cos^2 n_x + \cos^2 n_y) = \tilde{c}g\tilde{h}\Delta z \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} 2\tilde{c}n_x & g\tilde{h}\Delta z_x \\ 2\tilde{c}n_y & g\tilde{h}\Delta z_y \end{bmatrix} = 2\tilde{c}n_x g\tilde{h}\Delta z_y - 2\tilde{c}n_y g\tilde{h}\Delta z_x \\ &= 2\tilde{c}g\tilde{h}\Delta z (\cos n_x \cos n_y - \cos n_x \cos n_y) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \det \begin{bmatrix} 2\tilde{c}n_x & -\tilde{c}n_y \\ 2\tilde{c}n_y & \tilde{c}n_x \end{bmatrix} = 2\tilde{c}n_x \tilde{c}n_x + 2\tilde{c}n_y \tilde{c}n_y = \\ &2\tilde{c}^2 (\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y) = 2\tilde{c}^2 \left(\cos^2 \theta_x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_x \right) \right) = 2\tilde{c}^2 \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

determina i valori dei coefficienti β :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{g\tilde{h}\tilde{c}\Delta z}{2\tilde{c}^2} = \frac{g\tilde{h}\Delta z}{2\tilde{c}} \\ \beta_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0 \\ \beta_3 = -\beta_1 = -\frac{g\tilde{h}\Delta z}{2\tilde{c}} \end{array} \right. \quad (4.3.24)$$

dove la variabile \tilde{h} che compare nelle espressioni precedenti è definita come $\tilde{h} = \frac{1}{2}(h_r + h_l)$.

Considerando la scomposizione già vista per il caso 1D $a^\pm = \frac{1}{2}(a \pm |a|)$ il termine sorgente di sola pendenza del fondo può essere scritto, introducendo i segni degli autovalori:

$$\begin{aligned} s_1 = \text{segno}(a_1) &= \frac{|a_1|}{a_1} = \frac{|\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c}|}{\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c}} \\ s_2 = \text{segno}(a_2) &= \frac{|a_2|}{a_2} = \frac{|\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y|}{\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y} \\ s_3 = \text{segno}(a_3) &= \frac{|a_3|}{a_3} = \frac{|\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c}|}{\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c}} \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

e tenendo conto dei soli contributi entranti nella cella di calcolo:

$$\sum \beta^{-m} \tilde{e}^m = \begin{pmatrix} 1-s_1 & 1-s_2 & 1-s_3 \\ 1-s_1 & 1-s_2 & 1-s_3 \\ 1-s_1 & 1-s_2 & 1-s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix} \quad (4.3.26)$$

Consideriamo la sola equazione di bilancio della massa in caso stazionario, ($u=v=0$) i segni degli autovalori si riducono a

$$\begin{aligned} s_1 &= \pm 1 \\ s_2 &= 0 \\ s_3 &= \mp 1 \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

e la prima riga dell'equazione 4.3.26 diventa:

$$\begin{aligned} &(1-s_1)\beta_1 e_1 + (1-s_2)\beta_2 e_2 + (1-s_3)\beta_3 e_3 \\ &= (1-s_1)\beta_1 + (1-s_3)\beta_3 = \beta_1(s_3 - s_1) \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

ipotizzando $s_1=1$ e $s_3=-1$ la 4.3.28 si riduce al termine:

$$-2\beta_1 = -2 \frac{g\tilde{h}}{2\tilde{c}} \Delta z = \frac{g\tilde{h}}{\tilde{c}} \Delta z \quad (4.3.29)$$

Il residuo dell'equazione di continuità nel caso stazionario, come già visto per il caso monodimensionale è allora:

$$\begin{aligned} &-\frac{\Delta t}{A_i} \frac{1}{2} l_{i,j} \left(-\alpha_1 |\tilde{a}_q| \tilde{e}_1 - \alpha_2 |\tilde{a}_2| \tilde{e}_2 - \alpha_3 |\tilde{a}_3| \tilde{e}_3 \right) \\ &= -\frac{\Delta t}{A_i} \frac{1}{2} l_{i,j} \left(-\alpha_1 |\tilde{a}_q| - \alpha_3 |\tilde{a}_3| \right) = \frac{\Delta t}{A_i} \frac{1}{2} l_{i,j} (\Delta h_{RL} \tilde{c}) \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

questo residuo in caso stazionario è bilanciato dalla schematizzazione upwind del termine sorgente

$$2\Delta t\beta = \frac{2\Delta t g \tilde{h} \Delta z}{2\tilde{c}} \quad (4.3.31)$$

se e solo se è verificata la condizione:

$$\frac{\Delta t}{A_i} \frac{1}{2} l_{i,j} (\Delta h_{RL} \tilde{c}) = \frac{2\Delta t g \tilde{h} \Delta z}{2\tilde{c}} \quad (4.3.32)$$

per verificare il bilancio di massa nel caso stazionario ed avere pelo liquido orizzontale le espressioni dei β sono state modificate nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{4} \frac{g \tilde{h}}{\tilde{c}} \Delta z \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = -\frac{1}{4} \frac{g \tilde{h}}{\tilde{c}} \Delta z \end{array} \right. \quad (4.3.33)$$

La schematizzazione upwind del termine sorgente di pendenza del fondo può essere riassunta dalla:

$$\Delta t \frac{l_{i,j}}{A_i} \left[\begin{array}{l} (1-s_1)\beta e_1^1 - (1-s_3)\beta e_3^1 \\ (1-s_1)\beta e_1^2 - (1-s_3)\beta e_3^2 \\ (1-s_1)\beta e_1^3 - (1-s_3)\beta e_3^3 \end{array} \right] \quad (4.3.34)$$

Capitolo 5

Condizioni al contorno

5.1. Introduzione

L'ultimo passo che rimane per la completa soluzione delle Shallow Water Equation con gli schemi numerici ai volumi finiti descritti nel cap 3 è quello di definire le condizioni al contorno. Nelle equazioni scritte finora ci si è infatti riferiti sempre a punti interni al dominio di calcolo.

In un sistema di equazioni iperbolico il numero di condizioni al contorno che è possibile imporre è pari al numero di curve caratteristiche che entrano nel dominio di integrazione.

Tratteremo allora in modo separato il caso mono e bidimensionale.

5.2. Caso monodimensionale

5.2.1. Corrente subcritica

Si considerino le linee caratteristiche nel piano cinematico che hanno origine nei generici punti A e B (Fig.5.1) per i quali sono noti i valori della soluzione all'istante iniziale $t = 0$.

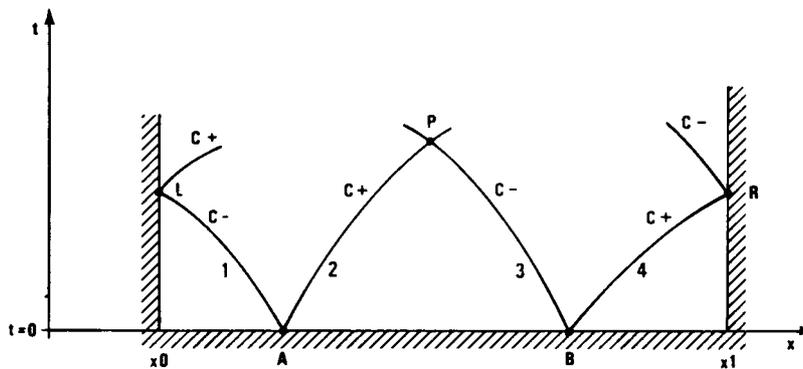


Figura 5.1-Condizioni al contorno nel piano (x-t)

In ogni punto P all'interno del dominio, la soluzione sarà data dall'intersezione delle due linee caratteristiche che hanno origine al tempo $t = 0$.

Nel punto L la soluzione dipende dalla soluzione in A che si propaga lungo la caratteristica negativa C^- e dalle condizioni al contorno assegnate in $x = x_0$. Ne consegue che nel punto L dovrà essere assegnata una ed una sola condizione al contorno, tipicamente l'idrogramma della portata entrante $Q_L^{n+1} = Q(t)$ per

$x=x_0$, in quanto l'area bagnata A verrà calcolata attraverso l'equazione di continuità in funzione delle sole grandezze al tempo precedente:

$$A_L^{n+1} = A_L^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_A^n - Q_L^n) \quad (5.2.1)$$

Analogamente a valle (punto R) dovrà essere assegnata una condizione al contorno che faccia sistema con l'equazione di continuità; tipicamente in questo caso è assegnato l'andamento nel tempo dell'area bagnata, ovvero una scala di deflusso, ovvero il numero di Froude della corrente:

$$A_R = A_R(t) \quad t \geq t_0 \quad \text{per } x = x_I.$$

$$A_R = A_R(h) \quad \text{per } x = x_I.$$

$$Fr = \frac{Q_R^{n+1}}{(A_R^{n+1})^{3/2} \sqrt{g/b_R^{n+1}}}$$

La legge appena detta sarà messa a sistema con l'equazione di continuità

$$\frac{A_R^{n+1} - A_R^n}{\Delta t} = \frac{(Q_R^{n+1} - Q_B^{n+1})}{\Delta x} \quad (5.2.2)$$

per determinare quindi il valore dell'incognita Q_R^{n+1}

5.2.2. Corrente supercritica

Nel caso di corrente veloce, entrambe le caratteristiche saranno rivolte verso monte. All'estremo di monte ($x = x_0$) dovremo assegnare due condizioni al contorno, oltre all'idrogramma della portata si assegnerà il numero di Froude

della corrente o un qualunque legame tra portate e tiranti, come la scala di deflusso

$$Q_L = Q_L(t) \quad Fr = \frac{Q_L^{n+1}}{(A_L^{n+1})^{3/2} \sqrt{g/b_L^{n+1}}} \quad (5.2.3)$$

all'estremo di valle invece non sarà necessaria nessuna condizione, perché le incognite saranno determinate esclusivamente dal valore delle variabili dipendenti all'interno del dominio al tempo $n+1$.

5.2.3. Condizioni al contorno interne

Nella simulazione della propagazione di onde a fronte ripido attraverso singolarità idrauliche come strettoie, paratoie, passaggio per le pile di un ponte, casi in cui la sezione trasversale subisce una notevole riduzione, è stato necessario inserire delle condizioni al contorno interne e separare dal dominio di calcolo in moto vario le sezioni a cavallo della singolarità. Le condizioni al contorno interne rappresentano una scala di deflusso in moto permanente che tenga conto delle perdite di carico attraverso la singolarità idraulica. La scala lega le grandezze idrauliche a monte con quelle a valle della singolarità se il regime di corrente è supercritico, le grandezze a valle con quelle a monte nel caso di regime subcritico.

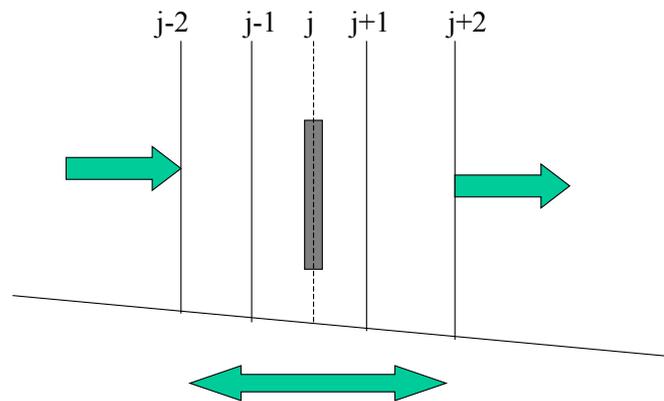


Figura 5.2-Schema di disconnessione del dominio applicando le condizioni al contorno interne

In questo modo è stato possibile simulare in modo corretto il deflusso attraverso tali sezioni anche con uno schema numerico monodimensionale.

Avendo disconnesso dal dominio di calcolo in moto vario i nodi $j-1, j+1$ la soluzione delle Shallow Water Equation discretizzate con gli schemi numerici upwind di cui si è parlato nel cap 3, è nota ai nodi $1-j-2$ e $j+2, n$.

Se in $j-2$ si ha una soluzione di corrente veloce si scrivono le equazioni di continuità e quantità di moto discretizzate all'indietro senza la correzione upwind, cioè:

$$A_{j-1}^{n+1} = A_{j-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{j-1}^n - Q_{j-2}^n) \quad (5.2.3)$$

$$Q_{j-1}^{n+1} = Q_{j-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\left(\frac{Q^2}{A} + g \frac{h^2}{2} \right)_{j-1}^n - \left(\frac{Q^2}{A} + g \frac{h^2}{2} \right)_{j-2}^n \right) \quad (5.2.4)$$

Nota la soluzione al nodo $j-1$ si applica la scala di corrente veloce per il calcolo della soluzione al nodo $j+1$. Si fa allora un controllo di congruenza della soluzione: se nella sezione $j+2$ c'è corrente lenta si confrontano le spinte totali nella sezione $j+1$ calcolate con il livello appena determinato e con quello che si determina dal sistema composto dall'equazione di bilancio della massa discretizzata in avanti senza correzione upwind, cioè:

$$A_{j+1}^{n+1} = A_{j+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{j+2}^n - Q_{j+1}^n) \quad (5.2.5)$$

dalla scala di corrente lenta attraverso la singolarità, che lega livelli a monte e a valle della stessa con la portata, e l'equazione di continuità scritta all'indietro senza correzioni upwind in $j-1$ (5.2.3).

Il livello che determina la spinta maggiore viene scelto come soluzione. In questo caso risulta possibile simulare il rigurgito da valle.

Nel caso in cui alla sezione $j+2$ ci sia corrente lenta, la soluzione in $j+1$ è calcolata mettendo a sistema le tre equazioni appena descritte (5.2.5), (5.2.3) e la scala di corrente lenta:

Nel caso in cui nella sezione $j-2$ non ci sia soluzione di corrente veloce e nella $j+2$ non ci sia una soluzione di corrente lenta si impone il passaggio attraverso lo stato critico. Si mette cioè a sistema l'equazione di bilancio di massa (5.2.3) con la scala di stato critico che lega l'altezza di monte e di valle della singolarità per un regime di portata prestabilito. Una volta nota la portata si determina automaticamente la soluzione nelle sezioni $j-1$ e $j+1$.

5.3. Caso bidimensionale

Un flusso bidimensionale può ammettere un gran numero di contorni diversi, che possono essere raggruppati in due grandi famiglie: superfici libere e superfici solide.

In ogni caso, come già detto per il caso monodimensionale, il numero di condizioni al contorno da imporre è determinato dalle caratteristiche del flusso, o meglio dal segno degli autovalori della matrice Jacobiana del flusso (eq. 3.10.6). Essi sono infatti associati alla celerità delle onde lungo la direzione normale alle pareti delle celle. Quando allora l'autovalore è positivo l'informazione si propaga lungo la direzione normale uscente alla cella stessa. Quando risulta negativo, la direzione di propagazione sarà la normale entrante. Nel caso bidimensionale si è scelto di utilizzare la stessa formulazione matematica sia per le celle interne che quelle di bordo del dominio. Per far questo si sono costruite delle celle immaginarie in corrispondenza dei lati degli elementi di contorno e si sono imposte in esse delle condizioni al contorno.

Dobbiamo ora distinguere le situazioni seguenti:

5.3.1. Ingresso supercritico

I tre autovalori sono positivi. L'informazione viaggia secondo la normale uscente alla cella di calcolo, sarà quindi necessario imporre tre condizioni al contorno. Nella cella immagine si imporrà il valore del numero di Froude della corrente, le componenti della portata lungo x ed y , dalle quali si ricaverà il tirante idrico della cella immagine. Nelle espressioni (3.11.2) in corrispondenza dell'interfaccia della generica cella i con la cella immagine si avrà quindi:

$$\begin{aligned}
 h_L &= h(Fr, Q_x, Q_y) & h_R &= h_i \\
 Q_{x_L} &= Q_{x_L}(t) & Q_{x_R} &= Q_{x_i} \\
 Q_{y_L} &= Q_{y_L}(t) & Q_{y_R} &= Q_{y_i}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.1}$$

Dove con i pedici R e L si sono indicati gli stati destro e sinistro dell'interfaccia tra la generica cella i e cella immagine.

5.3.2. Ingresso subcritico

Due autovalori sono positivi, quindi due caratteristiche usciranno dal dominio ed una entrerà nello stesso; è necessario quindi imporre due condizioni al contorno. Nel caso specifico si imporranno nella cella immagine gli idrogrammi delle componenti della portata lungo x ed y . Il tirante idrico sarà posto uguale a quello della cella adiacente. Nelle espressioni (3.11.2) in corrispondenza dell'interfaccia della cella i con la cella immagine si avrà quindi:

$$\begin{aligned}
 h_L &= h_i & h_R &= h_i \\
 Q_{x_L} &= Q_{x_L}(t) & Q_{x_R} &= Q_{x_i} \\
 Q_{y_L} &= Q_{y_L}(t) & Q_{y_R} &= Q_{y_i}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.2}$$

5.3.3. Uscita supercritica

I tre autovalori sono negativi, le tre caratteristiche escono dal dominio. Non bisognerà quindi imporre nessuna condizione al contorno, ed i valori di h , Q_x e Q_y , nella cella immagine saranno posti uguali a quelli della cella adiacente. Si calcoleranno i valori delle incognite al tempo $n+1$ in funzione di:

$$\begin{aligned}
 h_L &= h_i & h_R &= h_i \\
 Q_{x_L} &= Q_{x_i} & Q_{x_R} &= Q_{x_i} \\
 Q_{y_L} &= Q_{y_i} & Q_{y_R} &= Q_{y_i}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.3}$$

5.3.4. Uscita subcritica

Uno solo dei due autovalori è positivo, due sono negativi. Bisognerà imporre nella cella immagine una sola condizione, come ad esempio il numero di Froude o l'andamento nel tempo del tirante idrico. Come valori delle componenti della portata nelle due direzioni coordinate si considereranno i valori nella delle stesse nella cella contigua i , come espresso nelle (5.3.4).

$$\begin{aligned}
 h_L &= h(Fr, Q_x, Q_y) & h_R &= h_i \\
 Q_{x_L} &= Q_{x_i} & Q_{x_R} &= Q_{x_i} \\
 Q_{y_L} &= Q_{y_i} & Q_{y_R} &= Q_{y_i}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.4}$$

5.3.5. Caso di parete solida

In questo caso nella cella immagine si imporrà lo stesso tirante idrico della cella adiacente ma le componenti della portata lungo gli assi coordinati uguali in modulo ma con segno opposto.

$$\begin{aligned}
 h_L &= h_i & h_R &= h_i \\
 Q_{x_L} &= -Q_{x_i} & Q_{x_R} &= Q_{x_i} \\
 Q_{y_L} &= -Q_{y_i} & Q_{y_R} &= Q_{y_i}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.5}$$

5.3.6. Caso di contorno mobile (Wetting-drying fronts)

Il caso di un fronte che avanza su un letto asciutto è un caso di contorno mobile in un modello bidimensionale. Il modo migliore per affrontare un problema di questo genere è allora trovare la legge fisica che meglio rappresenta la dinamica della propagazione del fronte ed utilizzarla come condizione al contorno come nella procedura precedentemente illustrata. Nel caso di un fronte che avanzi su una contropendenza la colonna d'acqua tenderà a zero velocemente, la superficie libera e il fondo tenderanno ad un punto di intersezione, punto in cui dovranno verificarsi contemporaneamente la condizione al contorno della superficie libera e quella del fondo.

Consideriamo il caso mostrato in figura 5.3

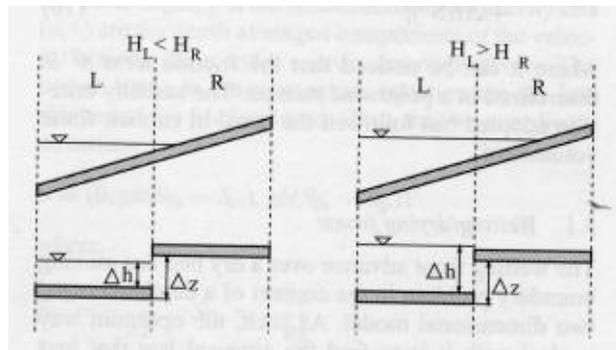


Figura 5.3-Descrizione continua e discreta della contropendenza

Sono disegnate la superficie libera ed il fondo nella rappresentazione discreta per mezzo di funzioni costanti sull'elemento z ed H , dove con H si indica il carico totale $H=h+z$. Possono verificarsi due condizioni:

- 1) $H_L < H_R$. Questa è la condizione di arresto, bisognerà intervenire per modificare la procedura in modo tale che l'acqua si fermi e non ci siano velocità o portate numeriche che nella realtà non hanno significato.
- 2) $H_L \geq H_R$. In questo caso non bisogna aggiungere nulla alla procedura già illustrata, perché il moto continua regolarmente con l'assenza di fenomeni non spiegabili dal punto di vista fisico.

Consideriamo prima il caso monodimensionale stazionario ($u=v=0$); estenderemo poi la trattazione anche al moto in stato non stazionario.

Facciamo riferimento alla figura 5.3 (figura a sinistra), per la quale vale la condizione $H_L < H_R$, che equivale alla condizione di arresto tra le celle R e L.

Come abbiamo già illustrato nel paragrafo precedente, la condizione che permette di verificare il bilancio di massa nel caso stazionario utilizzando la schematizzazione upwind dei termini sorgente è la 4.61, questa equazione risulta verificata se, e solo se esiste l'uguaglianza:

$$\Delta h_{RL} = \Delta z \quad (5.3.6)$$

La condizione appena scritta non si verifica sempre, proprio a causa della rappresentazione discreta dove la quota del fondo ed il tirante idrico vengono rappresentati costanti su ciascuna cella del dominio in corrispondenza del baricentro dell'elemento stesso. Può quindi verificarsi la situazione mostrata in figura 5.4 dove $\Delta h_{RL} \neq \Delta z_{RL}$. Questo provoca velocità numeriche che non hanno alcun significato fisico, che non esistono nella realtà.

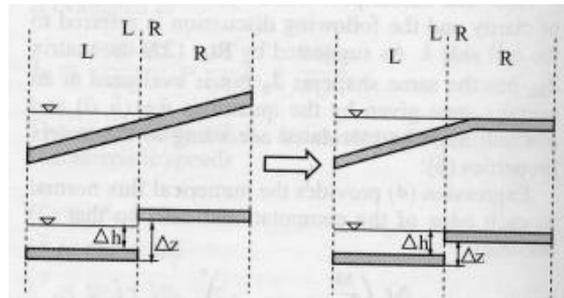


Figura 5.4-Condizione di arresto

L'equazione 5.3.6 può essere scritta anche nella forma:

$$h_R - h_L = z_L - z_R \Rightarrow h_R = h_L - (z_R - z_L) < 0 \quad (5.3.7)$$

che implica la presenza di tiranti negativi al di fuori del dominio bagnato.

Per evitare ciò si è adottata la tecnica seguente (Garcia Navarro et al 2002) che, per evitare errori numerici, ridefinisce localmente la quota di fondo all'interfaccia tra cella asciutta e bagnata, introducendo un

$$(\Delta z)_{RL}^{\text{mod}} = -\Delta h_{RL} \quad (5.3.8)$$

Nel caso non stazionario, per fronti d'onda che si propagano in tratti in contropendenza, si procede in modo analogo, modificando i coefficienti β nel caso in cui sia verificata la condizione $H_L < H_R$ che diventano:

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{4} \frac{g\tilde{h}}{\tilde{c}} \Delta h \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = +\frac{1}{4} \frac{g\tilde{h}}{\tilde{c}} \Delta h \end{cases} \quad (5.3.9)$$

Nel caso non stazionario, potendosi verificare propagazioni troppo veloci del fronte a causa della rappresentazione numerica della pendenza di fondo tra due celle adiacenti, si sono poste uguali a zero le componenti della velocità (u,v) all'interfaccia RL . Se non si pone questa condizione può verificarsi il passaggio di acqua alla cella asciutta, anche se in realtà la cella non è stata ancora bagnata.

Capitolo 6

Validazione del codice di calcolo

6.1. Introduzione

Per verificare il comportamento dei vari schemi numerici implementati durante il lavoro di tesi è stata svolta una revisione critica delle prove sperimentali di dam-break presenti in letteratura. In questo capitolo i risultati ottenuti con diversi solutori sono confrontati con le evidenze sperimentali di una vasta serie di prove su modello fisico al fine di analizzare in maniera sistematica:

- i limiti di applicabilità del modello matematico delle acque basse e la sua capacità di riprodurre onde a fronte ripido reali;
- le differenze tra i risultati ottenuti con i solutori del primo e del secondo ordine di accuratezza in vista di una applicazione a casi reali;
- le differenze tra diverse schematizzazioni dei termini sorgente.

Come esplicitamente dichiarato nel rapporto finale del progetto europeo CADAM (Morris 2000), la simulazione matematica delle numerose prove sperimentali effettuate nell'ambito del progetto non ha portato ad identificare un tipo di solutore numerico ottimale; l'analisi delle prestazioni dei vari solutori risulta essere un problema ancora aperto.

Dopo un confronto con la soluzione analitica del problema di Riemann i risultati del modello sono stati confrontati con prove di laboratorio in canalette a geometria:

- regolare: alveo prismatico con pendenza di fondo costante
- non regolare: alvei non prismatici che presentano restringimenti o allargamenti gradualmente
- non regolare: bruschi restringimenti della sezione trasversale

Per verificare il modello sono state poi effettuate prove sperimentali nel Laboratorio di Ingegneria Idraulica ed Ambientale dell'Università di Pavia, che riproducono il deflusso in corrispondenza di ostruzioni di diversa forma.

Per maggior chiarezza separeremo anche in questo caso le prove simulate con il codice di calcolo monodimensionale e con il bidimensionale.

6.1. Codice Monodimensionale

6.1.1. Soluzione analitica- Soluzione di Riemann

La soluzione analitica del problema di Riemann è stata confrontata con quelle numeriche ottenute con i solutori del I ordine (eq. 3.6.40 e 3.6.43) e del II ordine (eq. 3.10.16 e 3.10.17) imponendo un valore del rapporto tra tirante idrico a monte e a valle della paratoia di 100. In figura 6.1 sono messi a confronto i profili istantanei di pelo liquido calcolati con il solutore del primo e del secondo ordine e quelli calcolati con la soluzione analitica ad un tempo prefissato ($t=50s$) e per un passo di integrazione fisso pari a 1 m.

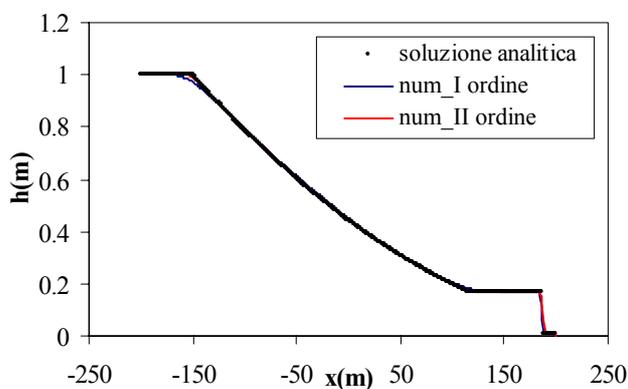


Figura 6.1 -Soluzione analitica- Confronto tra i profili istantanei di pelo liquido

Come si poteva immaginare i risultati di entrambi i solutori numerici ben si accordano con la soluzione analitica (vedi fig.6.1). In figura 6.2 si riporta l'andamento dell'errore medio $\varepsilon_h = \frac{h_{calc} - h_{mis}}{h_0}$ nel calcolo dei livelli idrici e

della posizione dei fronti d'onda al variare del passo di discretizzazione spaziale adimensionalizzato rispetto al tirante idrico iniziale a monte della diga $D=\Delta x/h_0$

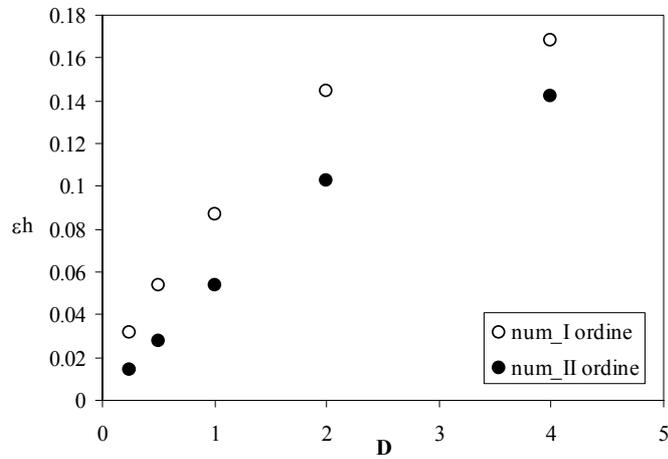


Figura 6.2- Andamento di ϵ_h al variare di D

Lo schema del secondo ordine risulta più accurato di quello del primo ordine, ma la differenza tra i risultati ottenuti con i due solutori diminuisce all'aumentare del passo di discretizzazione scelto. Al crescere di D l'errore tra i due schemi si riduce dal 55% al 17%

6.1.2. Prove Sperimentali

In tabella 6.1 è riportato l'elenco delle prove sperimentali prese in considerazione per la verifica dei modelli matematici, con una breve descrizione delle caratteristiche delle canalette.

Laboratorio	Prove Simulate	Codice
Wes (Chen 1980)	2 (1.1, 5.1)	W1, W2
Chatou (Faure e Nahas, 1961)	1 (1)	F1
Napoli (Montuori, 1964)	2 (a,d)	Ma, Mb
Chatou (Cunge 1970)	1 (3B)	C1
VAW (Chevret e Dalleves, 1970)	1 (4)	V1
Zurich (Lauber e Hager, 1998)	1 (1)	HH1
Strathclyde (Townson e Al-Salihi, 1989)	2(RT-RT1, 2)	S1, S2
Trace (Bellos <i>et al</i> , 1992)	2 (5, 7)	B1, B2
Pavia (Manciola <i>et al</i> 1994)	3 (1,2,3)	P1,P2, P3
Parma (Aureli <i>et al</i> , 1998)	2 (3, 4)	M3, M4
Bruxelles (Hiver, 2000)	1 (1)	H1
Chatelet (Bento Franco e De Almeida)	1 (1)	CH1
Parma (Aureli <i>et al</i> , 2000)	4 (1,3,4, 5)	MM1,MM3,MM4,MM5
Lnec (Hiver 2000)	1	L1
Pavia (Natale <i>et al</i> ,2004)	3 (1,2,3)	PP1,PP2,PP3
ENEL (Soares Frazao, Testa 2000)	2 (H1, H2)	T1, T2

Tabella 6.1-Elenco delle prove sperimentali simulate con il codice 1D

6.1.3. Prove a geometria semplice (standard)

In questo assetto sperimentale i termini sorgente hanno una modesta rilevanza (alvei prismatici a pendenza costante o nulla) in quanto si riducono alla sola resistenza al moto. Per questa ragione i due solutori sono stati confrontati adottando per entrambi una schematizzazione pointwise

6.1.3.1. Prove Laboratorio Chatou (Faure e Nahas 1961, Cunge 1970)

Sono state condotte nel 1970 da M. Cavaille. La canaletta era lunga 40 m, larga 0.25 m e con sponde alte 0.25 m. La quota di pelo liquido è 0.23 m a monte dello sbarramento e 0.01m a valle dello stesso (vedi figura 6.3). La sezione trasversale è a forma trapezoidale. Il dominio di calcolo è stato diviso in 101 sezioni poste ad un interasse di 0.4 m il valore del CFL è stato posto pari a 0.7, il coefficiente di resistenza al moto di Manning utilizzato nelle elaborazioni è $0.01 \text{ ms}^{-1/3}$

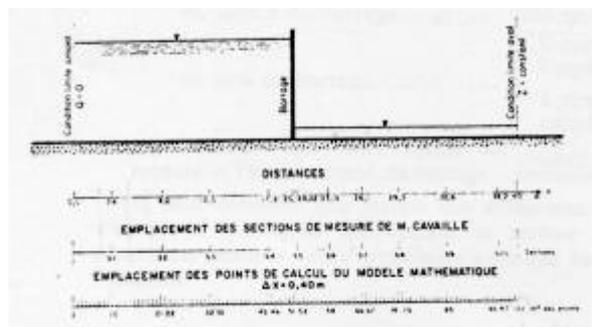


Figura 6.3-Prova C1-Profilo longitudinale della canaletta

Si riportano gli andamenti degli idrogrammi dei livelli in varie sezioni trasversali all'interno del serbatoio e a valle dello stesso.

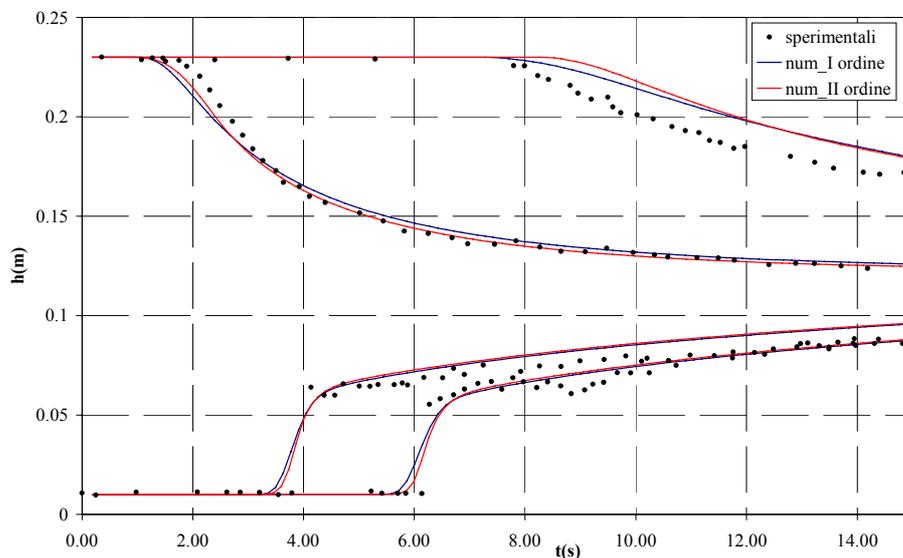


Figura 6.4-Prova C1-Confronti tra idrogrammi misurati e calcolati in 4 sezioni

I risultati ottenuti con i due solutori sono del tutto confrontabili, con differenze marginali ai fini pratici, soprattutto per quanto attiene la propagazione dell'onda. In ogni caso il modello matematico sovrastima di circa il 3% i livelli idrici a valle della paratoia.

Con la stessa apparecchiatura sperimentale J.Faure e N.Nahs già' nel 1961 avevano eseguito prove sperimentali di dam-break su fondo asciutto. Si riportano nella figura 6.5 gli idrogrammi dei livelli in tre sezioni di progressive -11.80 m; 3.10 m e 6.10 m, dove l'origine degli assi è stata posta alla paratoia.

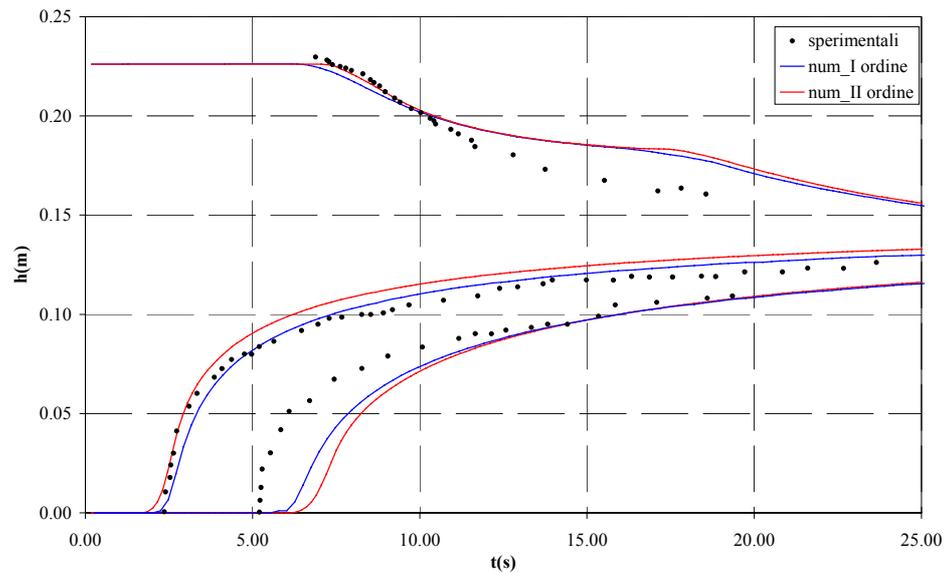


Figura 6.5-Prove F1-Confronto tra idrogrammi dei livelli misurati e calcolati

In questo caso le differenze tra i risultati ottenuti con i due solutori sono più evidenti ma sicuramente inferiori agli scostamenti tra valori osservati e calcolati.

Non va comunque dimenticato che le prove sperimentali, eseguite più di 40 anni fa, possono essere più incerte di quelle ottenute più di recente e acquisite dalle pubblicazioni originali degli autori, che sono disponibili direttamente su supporto magnetico.

6.1.3.2. Prove Università di Zurigo (Lauber e Hager 1998)

La canaletta era rettangolare, lunga 14 m e larga 0.5 m. La paratoia, verticale, era localizzata in corrispondenza dell'ascissa $x=3.5$ m. Il valore del coefficiente di resistenza utilizzato nei calcoli è stato $n=0.007 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$. Il dominio

di calcolo è stato suddiviso in 467 sezioni poste ad un interasse di 0.03 m, il valore del CFL adottato per le simulazioni è 0.7.

Nella figura 6.6 sono confrontati i profili longitudinali adimensionalizzati a vari istanti di tempo dopo l'apertura della paratoia con i risultati ottenuti con i due solutori numerici. Come si può vedere non si notano grandi differenze tra i risultati ottenuti con i due solutori, che sono soddisfacenti.

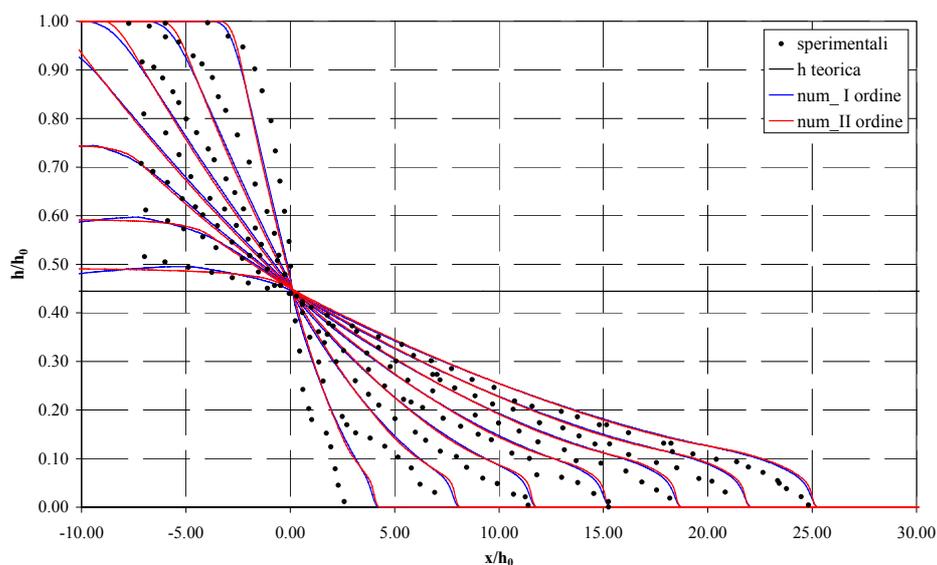


Figura 6.6-Prove HH1-Confronto tra profili istantanei di pelo liquido misurati e calcolati

Si sono poi confrontati gli idrogrammi della portata misurata alla sezione della paratoia con la soluzione numerica. La figura 6.7 mostra che immediatamente dopo la rimozione della paratoia le soluzioni numeriche non vanno d'accordo con i dati sperimentali. La soluzione numerica riproduce il valore teorico della portata nella sezione della paratoia ($Q^*=8/27=0.299$) ma l'apparato sperimentale non permette l'istantanea rimozione della paratoia e quindi la portata uscente risulta minore. Dopo il transitorio iniziale l'accordo tra

la soluzione numerica calcolata e i dati sperimentali risulta buona per entrambi gli schemi.

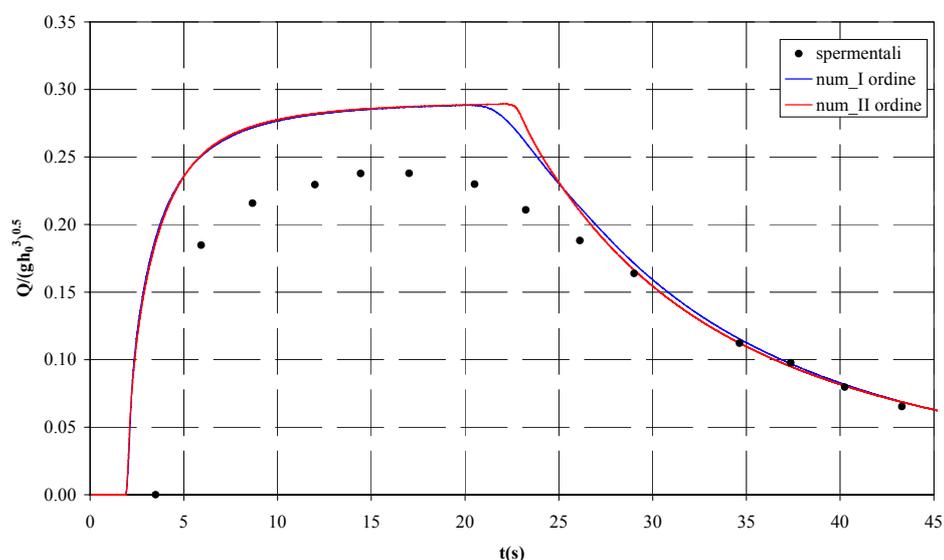


Figura 6.7- Prove HH1:confronto tra idrogrammi di portata misurati e calcolati nella sezione della paratoia.

Le differenze tra valori calcolati e misurati sono dovuti principalmente al modello matematico, in quanto il moto immediatamente dopo la rimozione della paratoia è essenzialmente 2D. I due solutori numerici danno risultati simili, le differenze diventano consistenti (più del 20%), solo se si considerano passi spaziali di integrazione più grandi.

6.1.3.3. Prove condotte all'Università di Napoli Federico II (Montuori 1964)

Queste prove, sebbene condotte 40 anni fa, sono particolarmente ben documentate e furono protratte per i tempi sufficientemente lunghi. Sono inoltre

di grande interesse in quanto il regime della corrente alla sezione diga passava da critico a subcritico per effetto del rigurgito da valle.

Il canale di sezione rettangolare larga 30 cm è lungo 26 m, e la pendenza di fondo è pari allo 0.3 %.

In una vasca di alimentazione posta in testa al canale veniva immessa una portata costante; la propagazione nel canale avveniva sia in condizioni di fondo asciutto che bagnato (tirante di 1 e 2 cm). Nelle simulazioni che si riportano si è considerata la condizione di fondo asciutto.

Negli esperimenti furono considerati quattro schemi di immissione di portata (vedi figura 6.8); nelle simulazioni sono stati presi in esame gli schemi (a) e (d).

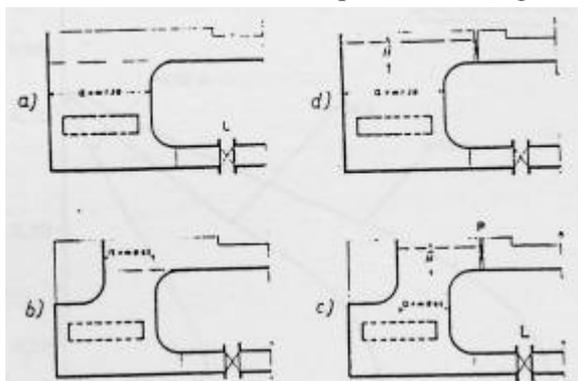


Figura 6.8-Schemi di immissione di portata

Le esperienze sono state condotte con due tipi di rivestimenti del fondo del canale: intonaco di cemento ben liscio (canale liscio, $k=113 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$) e intonaco rugoso con sabbia grossa e cemento (canale scabro $k=57 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$). La portata immessa nel canale è stata fatta variare da 5 l/s a 70 l/s per il canale a pareti lisce, da 3 l/s a 60 l/s per il canale a pareti scabre. Sono state simulate le esperienze con portate immesse pari a 30 l/s e 60 l/s per entrambi i canali lisce e scabri.

In dominio di calcolo è stato suddiviso in 138 sezioni poste ad un interasse di 0.1 m, il valore del CFL utilizzato nei calcoli è 0.7.

Nel canale liscio le onde si propagano in regime supercritico ovunque. Nella figura 6.9 si sono confrontati i tempi di arrivo dei fronti d'onda misurati alle progressive 8.51 m, 17.01 m e 25.56 m con quelli ottenuti dai solutori di diverso grado di accuratezza per il canale liscio per entrambe le immissioni (a) e (d) di figura 6.8.

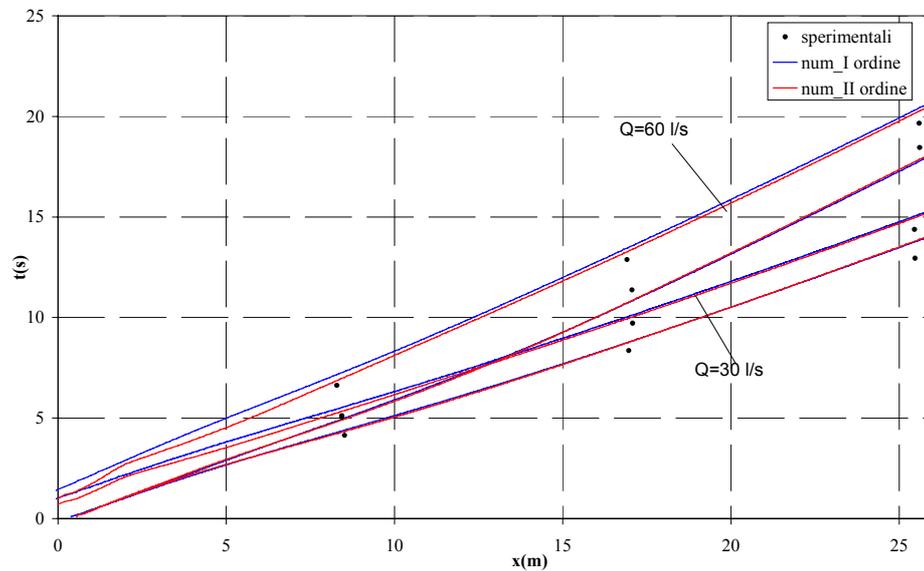


Figura 6.9-Prove Ma-Mb- canale liscio- Tempi di avanzamento dei fronti d'onda

La differenza tra i due solutori numerici non è apprezzabile, ma l'andamento generale delle simulazioni mostra un leggero ritardo dell'onda simulata che però rimane costante nel tempo.

La figura 6.10 fa riferimento alla simulazione delle esperienze condotte su canale scabro

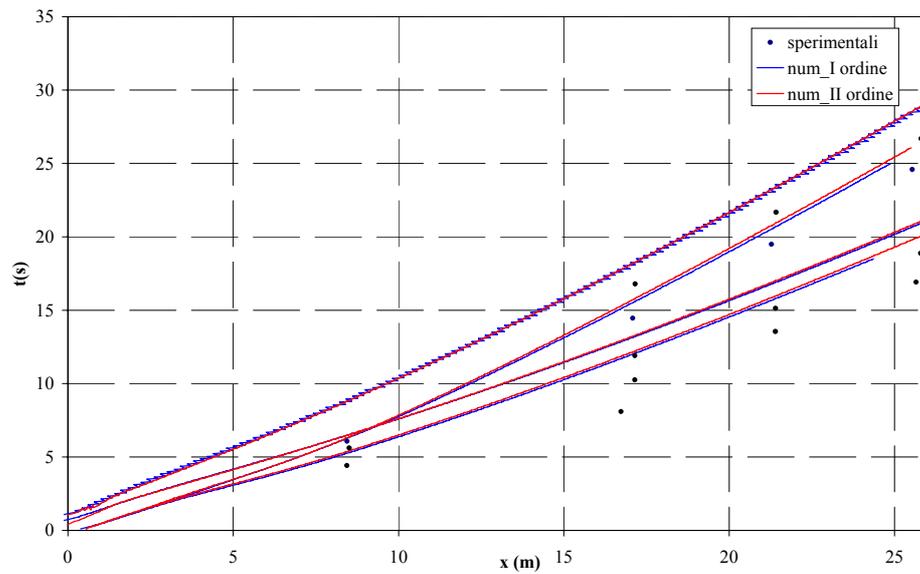


Figura 6.10-Prove Ma-Mb- canale scabro- Tempi di avanzamento dei fronti d'onda

Anche in questo caso non si notano grandi differenze tra i due solutori numerici, che sottostimano le velocità di propagazione, come evidenziato anche dall'andamento del tirante idrico in due sezioni ($x=0.45$ e $x=15.55$), vedi fig. 6.11, e dai profili istantanei di pelo liquido calcolati per due differenti situazioni: a 15 e a 25.5 secondi, vedi fig. 6.12.

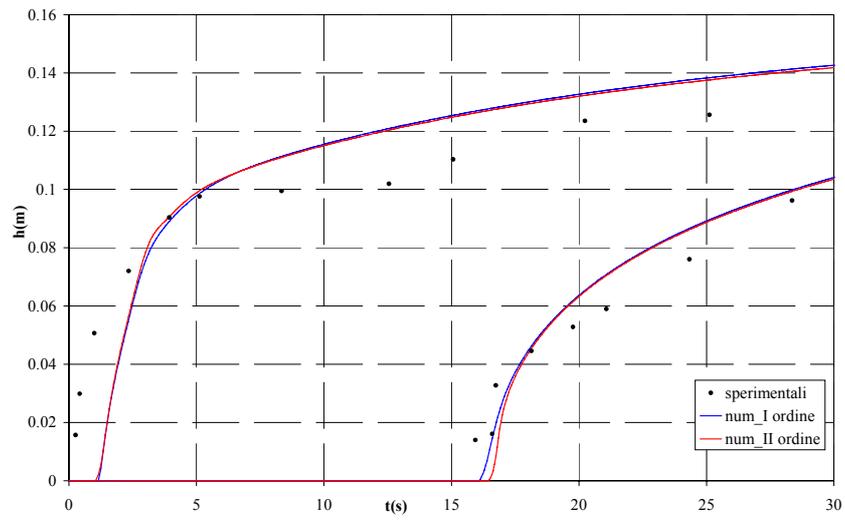


Figura 6.11-Prova Mb-Confronto tra idrogrammi dei livelli misurati e calcolati

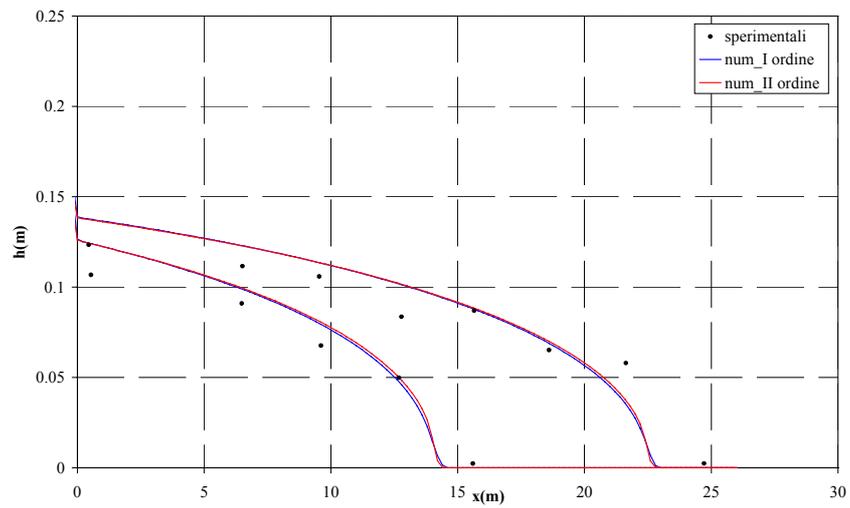


Figura 6.12- Prova Mb- Confronto tra profili istantanei di pelo liquido misurati e calcolati

Nelle prove Ma e Mb veniva immessa nel serbatoio una portata costante pari a 30 o 60 l/s. Nel calcolo questo fenomeno è stato riprodotto considerando una portata uniforme distribuita pari a $q=0.03$ o 0.06 mc/s (che compare nell'equazione di continuità).

6.1.3.4. Prove Università di Pavia (Manciola et al 1994)

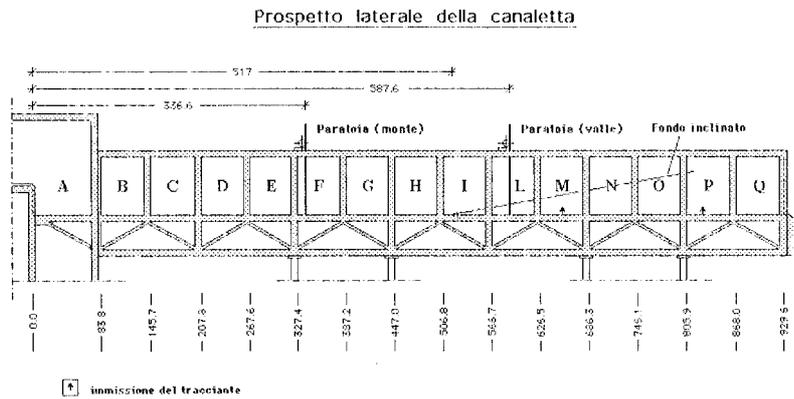


Figura 6.13- Università di Pavia- Prospetto laterale della canaletta

La canaletta è lunga 9 m e larga 0.49. La paratoia è disposta in due posizioni lungo il canale, ad $x=3.37$ m ed $x=5.88$ m rispettivamente (vedi figura 6.13). Gli esperimenti sono stati condotti considerando condizioni di fondo asciutto ovvero di tirante non nullo a valle della paratoia. In alcuni esperimenti a 5.17 m dalla testa del canale è stata posta una rampa in contropendenza. Il dominio di calcolo è stato diviso in 48 sezioni poste ad interasse di 0.2 m, il valore del coefficiente di resistenza al moto utilizzato è stato $n=0.015$ m^{-1/3}s. Il valore del CFL utilizzato per le simulazioni è stato 0.7.

Considereremo in seguito la condizione di fondo asciutto e canaletta orizzontale.

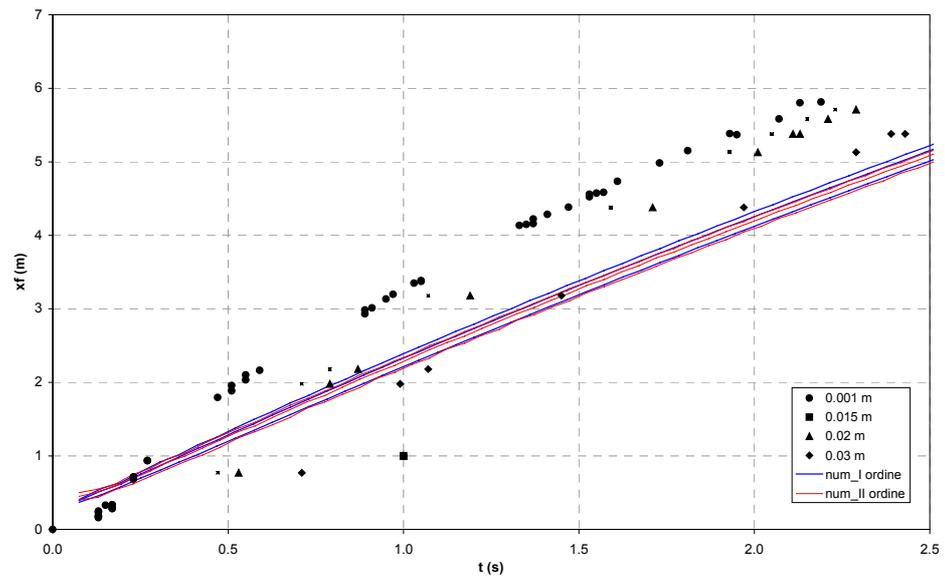


Figura 6.14–P1-confronto tra i tempi di avanzamento calcolati e misurati dei fronti d’onda

In Fig. 6.14 vengono confrontate le posizioni del fronte, identificato con altezze di $h= 0.001, 0.015, 0.020, 0.030$ m. Il modello matematico risulta inadeguato per simulare la propagazione dell’onda negli istanti immediatamente successivi all’apertura della paratoia, in quanto trascura la presenza di accelerazioni verticali, che può essere messa in conto solamente con un modello tridimensionale

Nella figura 6.15 si riporta l’andamento del livello nella sezione in cui si verifica il cambio di pendenza. Come si può vedere le differenze tra primo e secondo ordine di accuratezza sono molto piccole, ma rilevanti solo nella fase della riflessione.

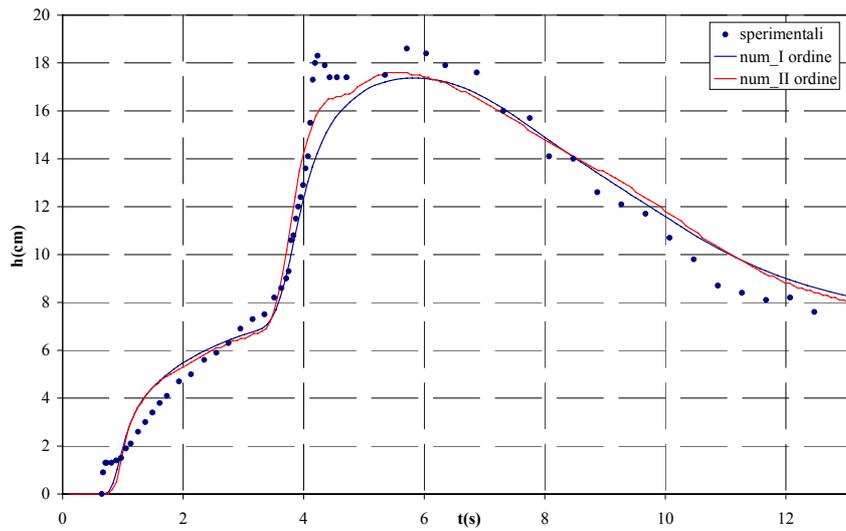


Figura 6.15- P2- Confronto tra idrogrammi dei livelli al cambio di pendenza

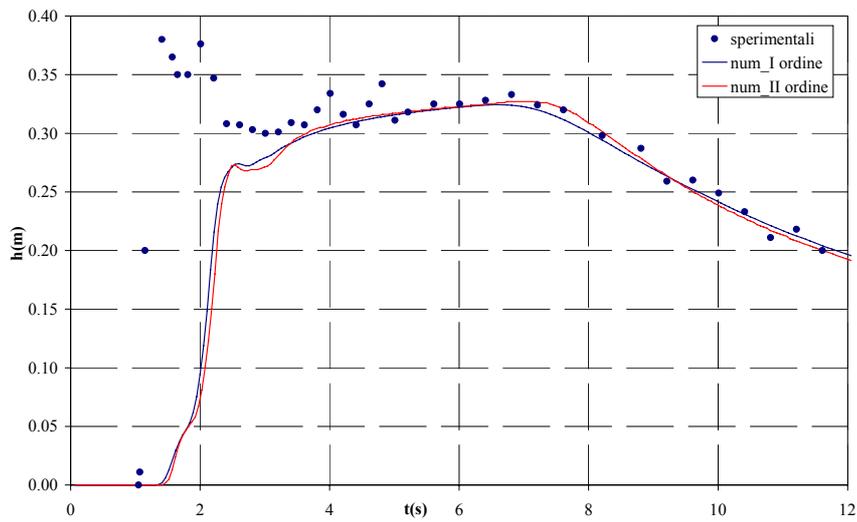


Figura 6.16-Prova P3-Confronto tra idrogrammi dei livelli nella sezione di riflessione

Nella figura 6.16 è riportato l'andamento nel tempo del livello nella sezione di riflessione della canaletta ($x=9.29$ m). Nessuno dei due solutori è in grado di simulare gli istanti iniziali della riflessione, soprattutto il sovrizzo superiore ai 35 cm, dato esclusivamente dalla schiuma e non rappresentabile in uno schema di fluido monofase.

6.1.3.6. Prove condotte nel laboratorio WES (Chen 1980)

La canaletta è lunga 122 m, larga 1.22 m e la sua pendenza è pari allo 0.005%. La paratoia è posta a metà del canale ed è alta 0.305 m. In questo caso si è analizzata una prova di dam-break classica su fondo inclinato, la (1.1) dell'articolo originale (Chen 1980). Il dominio di calcolo è stato discretizzato in 101 sezioni poste ad un interasse di 1.22 m, il coefficiente di resistenza al moto utilizzato nei calcoli è $0.009 \text{ ms}^{-1/3}$. Si riportano i risultati delle simulazioni confrontati con i dati sperimentali calcolati per un valore di CFL di 0.7. Nella figura 6.17 si riportano gli idrogrammi delle portate in tre sezioni a valle della paratoia.

Differenze evidenti tra i due solutori numerici non sono apprezzabili, e si nota una buona concordanza con i dati sperimentali, eccetto che nelle prime fasi del moto.

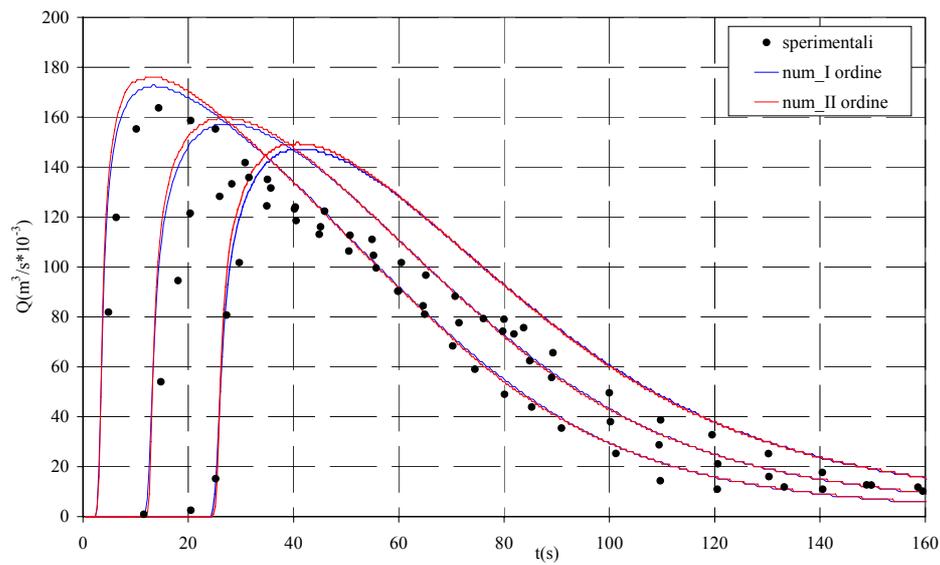


Figura 6.17-ProveW1- Andamento degli idrogrammi di portata misurati e calcolati in tre sezioni

Come si è visto dalle elaborazioni precedenti su canalette prismatiche a pendenza costante non esistono grandi differenze tra il solutore di Roe e quello che utilizza l'estrapolazione delle variabili di tipo MUSCL.

6.1.4. Prove condotte su canali non prismatici

Segue ora la descrizione delle simulazioni di quelle prove caratterizzate da bruschi cambi di pendenza, presenza di ostacoli e di tratti gradualmente convergenti-divergenti. In questo caso è stata analizzata anche la trattazione del termine sorgente, come descritto nel capitolo 4.

6.1.4.1. Prove condotte all'Università Strathclyde (Townson e Al-Salihi 1989)

Queste prove sperimentali sono state condotte nel laboratorio William Frazer dell'Università di Strathclyde. Tra tutte quelle riportate si è scelto di simulare quelle che presentavano una contrazione e poi un allargamento della sezione trasversale. Il canale è lungo 4m, la larghezza della sezione della diga è 0.1 m e l'angolo di espansione e contrazione è 5 gradi. La canaletta è orizzontale, la quota di pelo liquido all'interno del serbatoio è 0.10 m e a valle 0.0176 m.

Il dominio di calcolo è stato suddiviso in 81 sezioni poste ad un interasse di 0.5 m, il CFL utilizzato per le simulazioni è stato 0.85.

Si riporta il profilo istantaneo di pelo liquido all'istante 1.5 s confrontato con la simulazione numerica ottenuta con i solutori del primo e del secondo ordine di accuratezza.

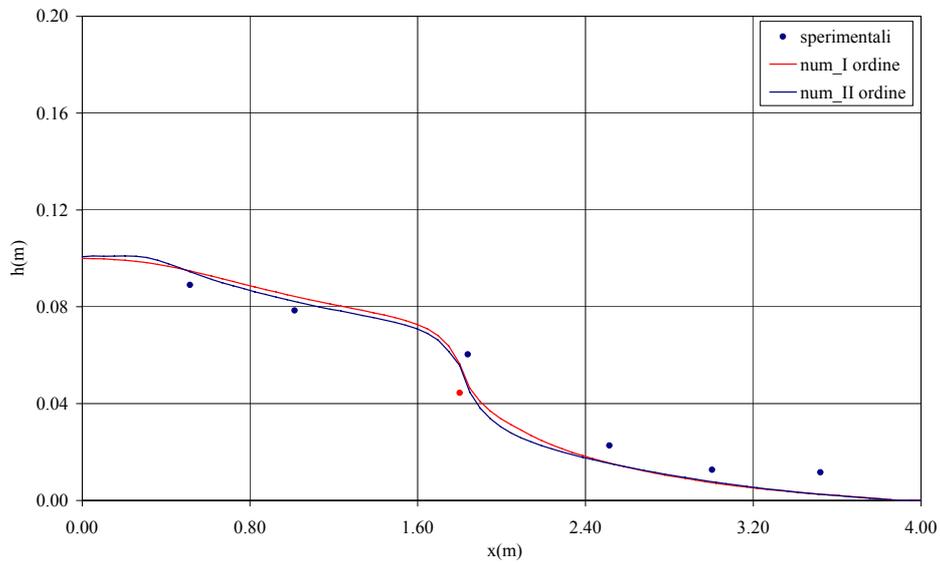


Figura 6.18- Prova S1. Profilo istantaneo di pelo liquido misurati e calcolati a 1.5 s

Come si nota dalle figura entrambi i solutori riescono a rappresentare correttamente il livello in corrispondenza della sezione della diga ($4/9 h_0$), il solutore del secondo ordine risulta più accurato anche se le differenze sono trascurabili.

6.1.4.2. Prove Università di Parma (Aureli et al 1999)

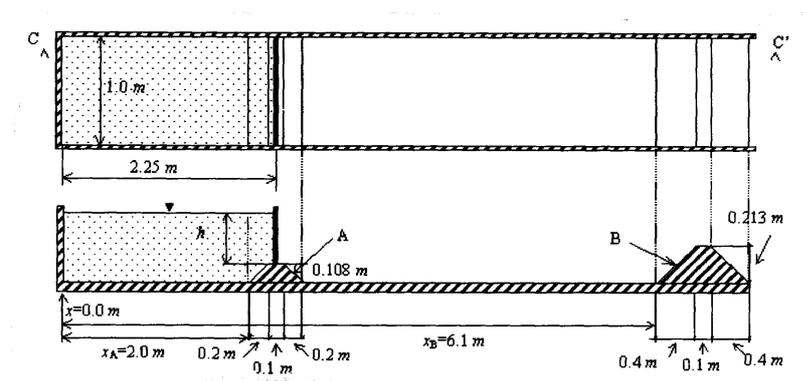


Figura 6.19- Università di Parma- Descrizione dell'apparato sperimentale

Gli esperimenti sono stati condotti nel dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Parma (vedi fig.6.19). Asperità di altezza rilevante sono disposte in due sezioni, in corrispondenza della paratoia e più a valle per indurre grandi curvature e la riflessione dell'onda nel canale. La diga è posizionata a $x=2.25$ m dalla testa del canale, il coefficiente di Manning utilizzato nelle elaborazioni è $0.01 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$. Si sono simulate diverse condizioni, con le asperità posizionate in diverse posizioni, con fondo inclinato e fondo orizzontale. Il dominio di calcolo è stato suddiviso in 141 sezioni aventi interasse di 0.05 m, il valore del CFL adottato nelle simulazioni è 0.7.

In figura 6.20 sono riportati gli idrogrammi misurati e calcolati del tirante idrico in quattro diverse sezioni per il test n.3 (presenza di entrambe le asperità, pendenza del fondo nulla), ed in particolare una all'interno del serbatoio (S1), una in corrispondenza della paratoia (S2) e due a valle della stessa (S3, S4). La stazione di misura S4 si trova in corrispondenza del cambio di pendenza.

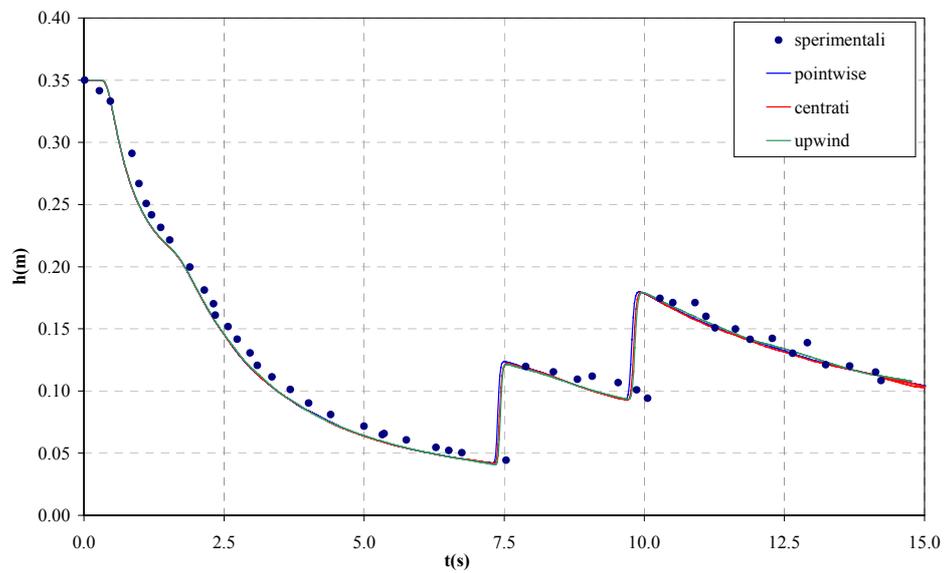


Figura 6.20 a- Prove M1: Andamento del tirante idrico calcolato e misurato S1

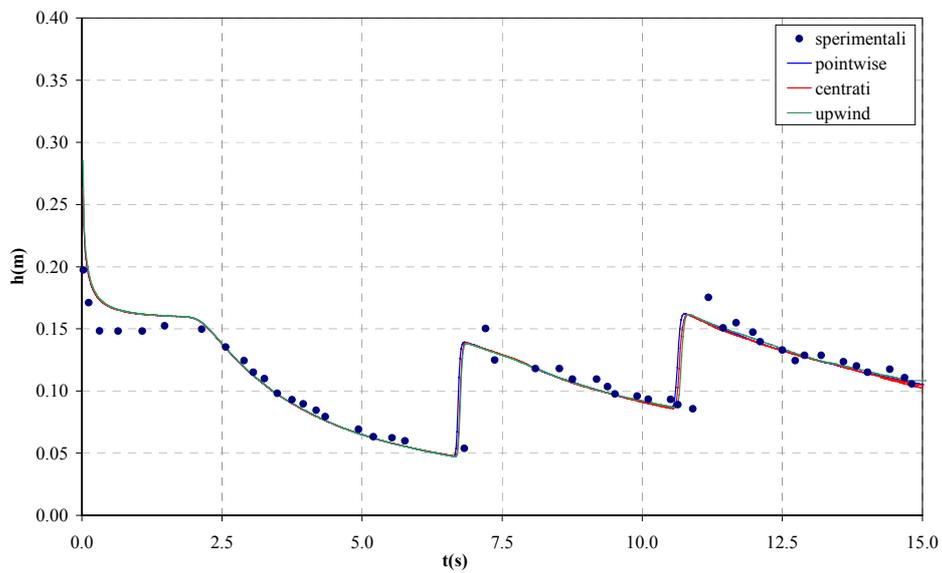


Figura 6.20 b- Prove M1: Andamento del tirante idrico calcolato e misurato S2

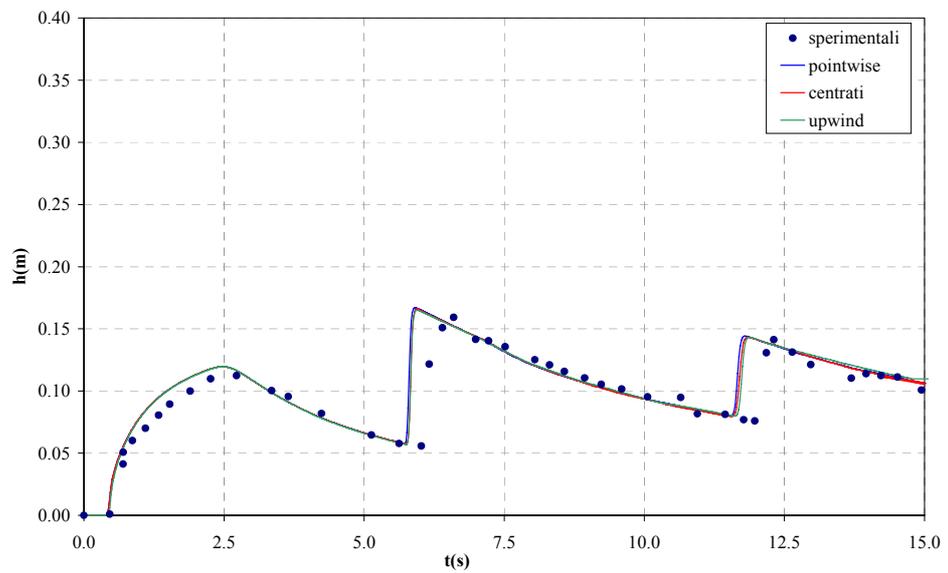


Figura 6.20 c- Prove M1: Andamento del tirante idrico calcolato e misurato S3

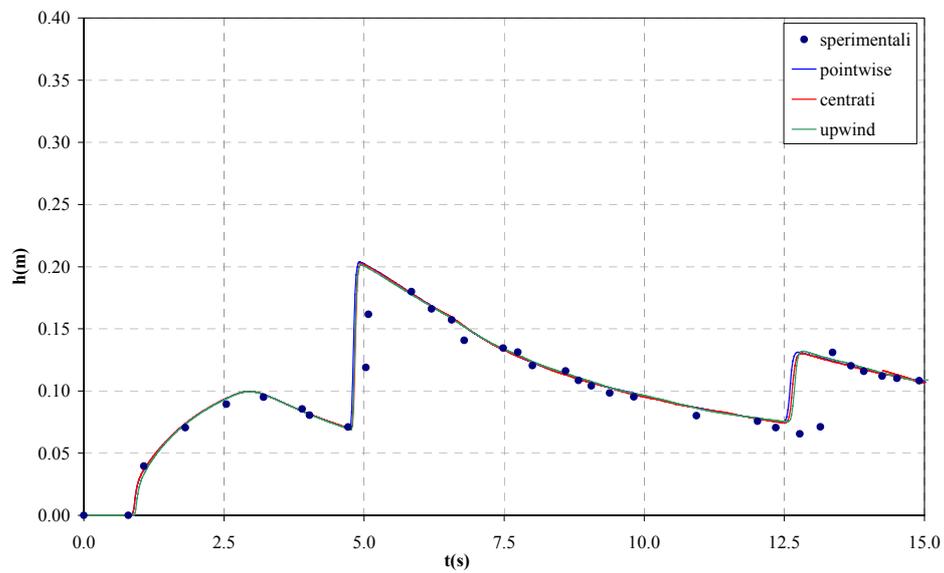


Figura 6.20 d- Prove M1: Andamento del tirante idrico calcolato e misurato S4

I risultati ottenuti dai due schemi di calcolo considerati sono molto simili, solamente nella sezione immediatamente successiva alla paratoia si osservano valori che differiscono di circa 1 cm (7%). Si riesce a riprodurre con buona approssimazione le riflessioni dell'onda nel canale, sia come tempi che come valori dei livelli raggiunti.

6.1.4.3. Prove Università di Parma (Aureli et al 1998)

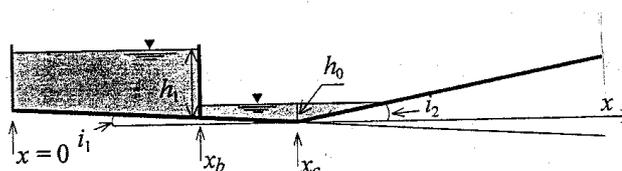


Figura 6.21- Università di Parma- Descrizione apparato sperimentale

La canaletta è rettangolare, lunga 7 m larga 1 m, la paratoia verticale è posizionata nell'ascissa $x=2.25$ m (vedi figura 6.21). Gli esperimenti sono stati condotti per diversi valori di pendenza del fondo, scabrezza del canale, e tirante idrico a valle della diga.

Si sono simulati gli esperimenti n. 1, 3, 4, 5 dell'articolo originale. Consideriamo per brevità esclusivamente l'esperimento n.4, la parte a monte della canaletta era orizzontale e il tratto a valle era in contropendenza (10%). Il tirante idrico iniziale era $h_0=0.25$ e il rapporto tra i tiranti idrico a monte e a valle della sezione della diga era 5.56. Il valore del coefficiente di scabrezza di Manning utilizzata è $0.01 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$. In Fig.6.22 si sono confrontati gli idrogrammi dei livelli calcolati e misurati nelle sezioni P1($x=2.25$ m); P2($x=3.4$ m), P3($x=4.5$ m), P4 ($x=5.2$ m). La seconda sezione in esame (P2) si trova in corrispondenza al cambio di pendenza. I risultati numerici sono stati ottenuti discretizzando il dominio in 132 sezioni poste ad interasse di 0.25 m e imponendo il valore di CFL pari a 0.7.

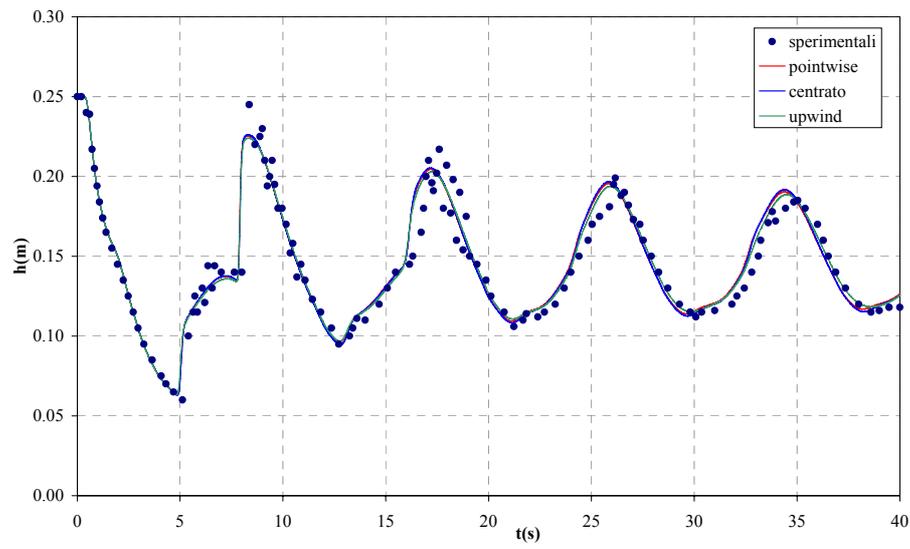


Figura 6.22 a– Prove MM1 idrogrammi dei livelli calcolati e misurati-P1

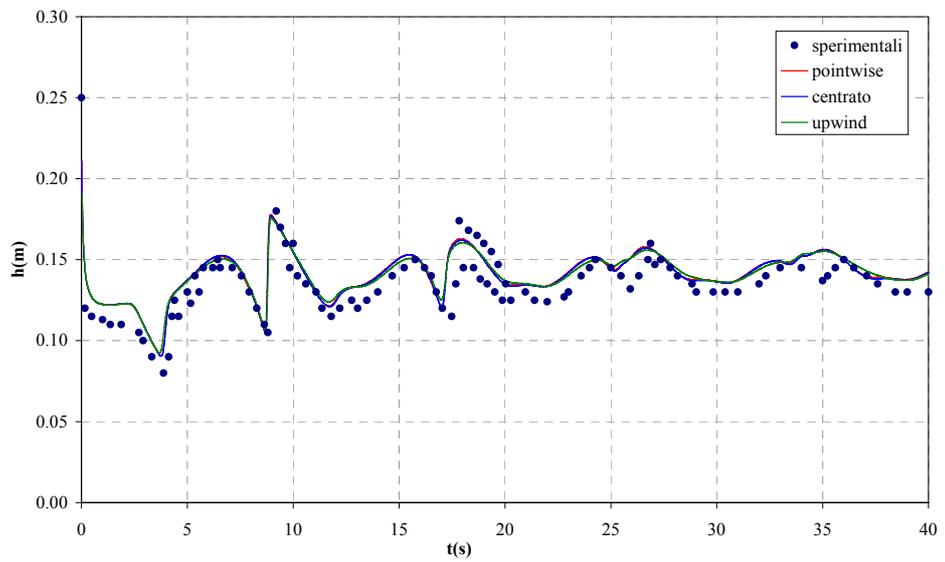


Figura 6.22 b– Prove MM1 idrogrammi dei livelli calcolati e misurati-P2

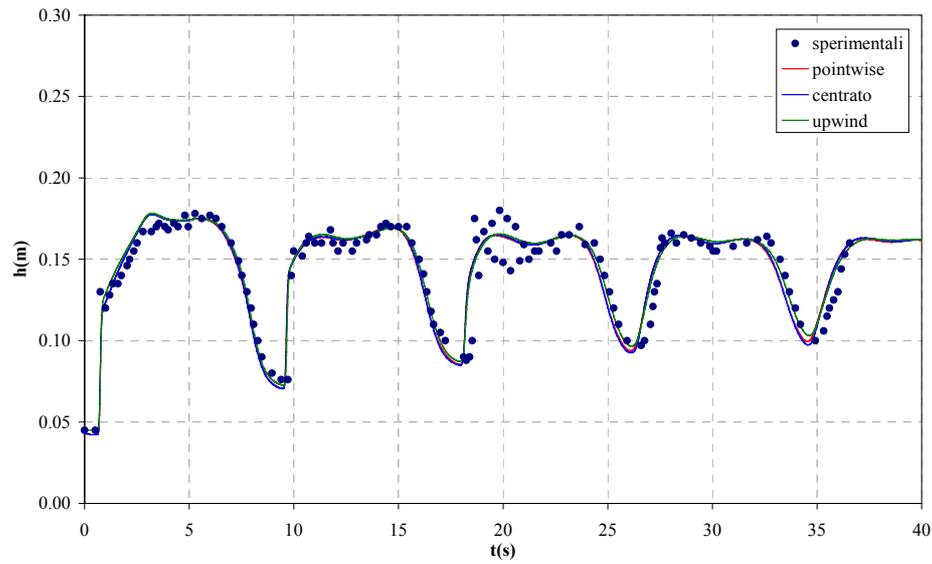


Figura 6.22 c– Prove MM1 idrogrammi dei livelli calcolati e misurati-P3

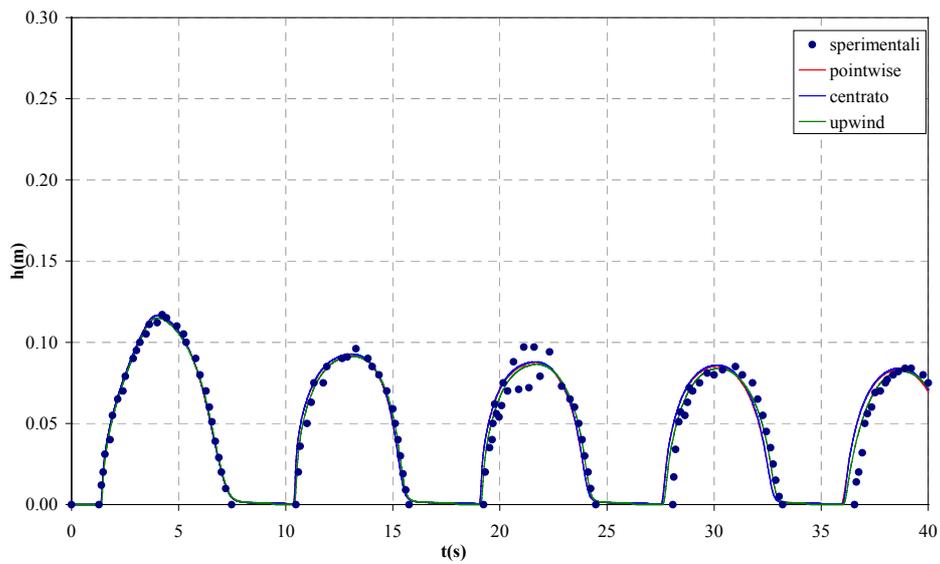


Figura 6.22 d– Prove MM1 idrogrammi dei livelli calcolati e misurati-P4

Entrambi gli schemi numerici simulano i risultati sperimentali in modo soddisfacente, si notano differenze marginali tra le tre schematizzazioni del termine sorgente che riescono a riprodurre sia la riflessione dell'onda che gli asciugamenti e i relativi bagnamenti del canale (fig. 6.22 d).

6.1.4.4. Università di Bruxelles (Hiver 2000)

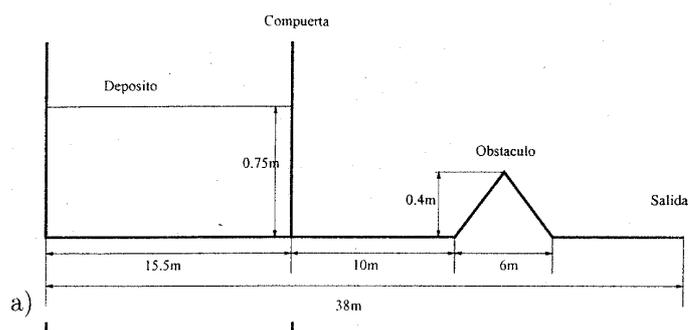


Figura 6.23-Università di Bruxelles- Profilo longitudinale della canaletta

La canaletta era rettangolare, lunga 38 m e larga 1 m. Era presente un ostacolo a forma di triangolo lungo 6 m e alto 0.4 m. La paratoia era localizzata alla progressiva $x=15.5$. Il tirante idrico iniziale era di 0.75 m. Due condizioni sono state simulate: fondo asciutto (S1, vedi fig 6.23) e fondo bagnato (S2, vedi fig 6.24) con la presenza di una piccola porzione di acqua ferma contenuta tra l'ostacolo e un piccolo stramazzo di 0.15 m. Il termine di resistenza al fondo è stato considerato attraverso un coefficiente di Manning pari a $n=0.0125 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$.

Il dominio di calcolo è stato discretizzato in 761 sezioni poste ad un interasse di 0.05 m, il valore del CFL utilizzato è 0.8.

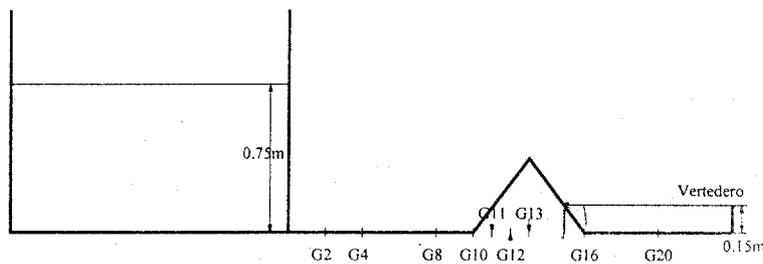


Figura 6.24- Università di Bruxelles- Descrizione dell'apparato sperimentale

Nelle figg.6.25 a-d è mostrato il confronto in differenti sezioni degli idrogrammi del livello calcolati e misurati nelle sezioni di misura G4 ($x=19.5$ m), G10 ($x=25.5$ m), G11 ($x=26.5$ m), G13 ($x=28.5$ m)

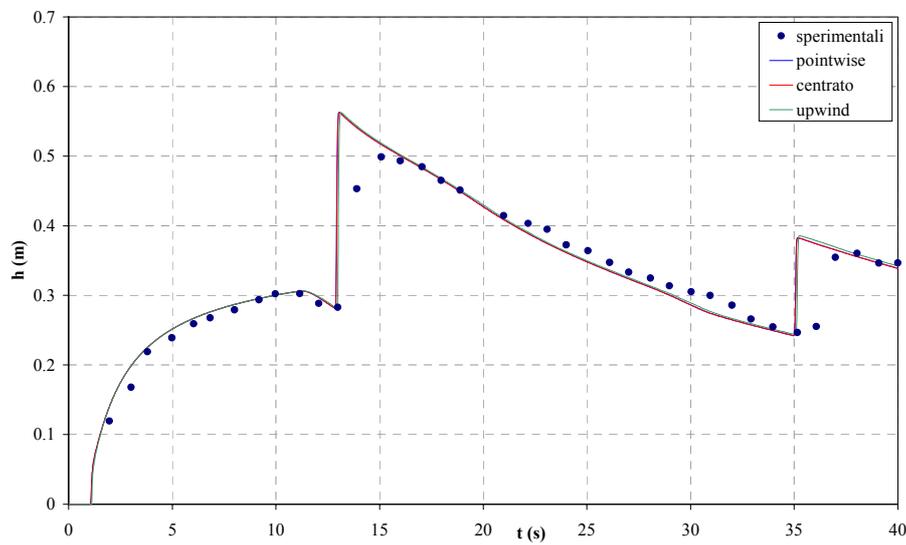


Figura 6.25a- Prove H1-idrogrammi dei livelli calcolati e misurati G4

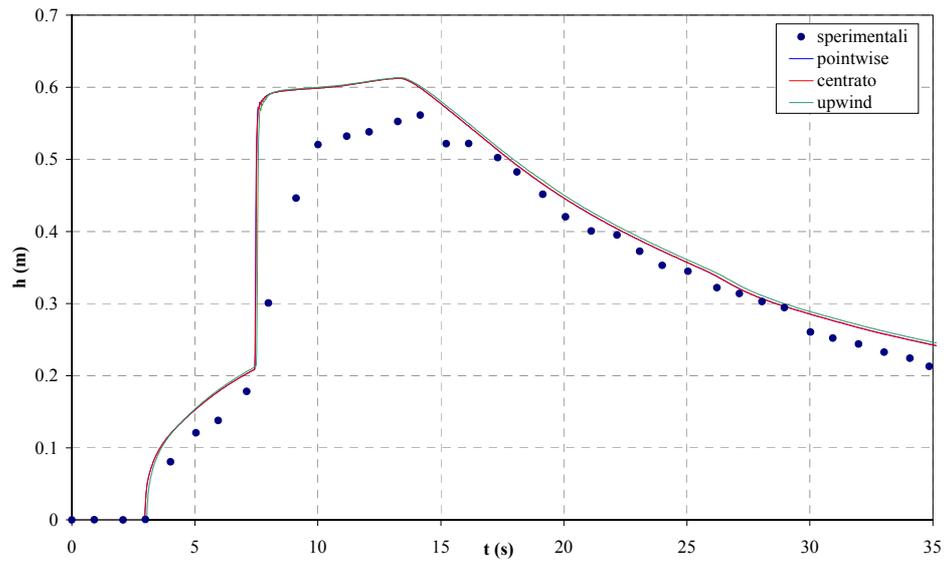


Figura 6.25b– Prove H1-idrogrammi dei livelli calcolati e misurati G10

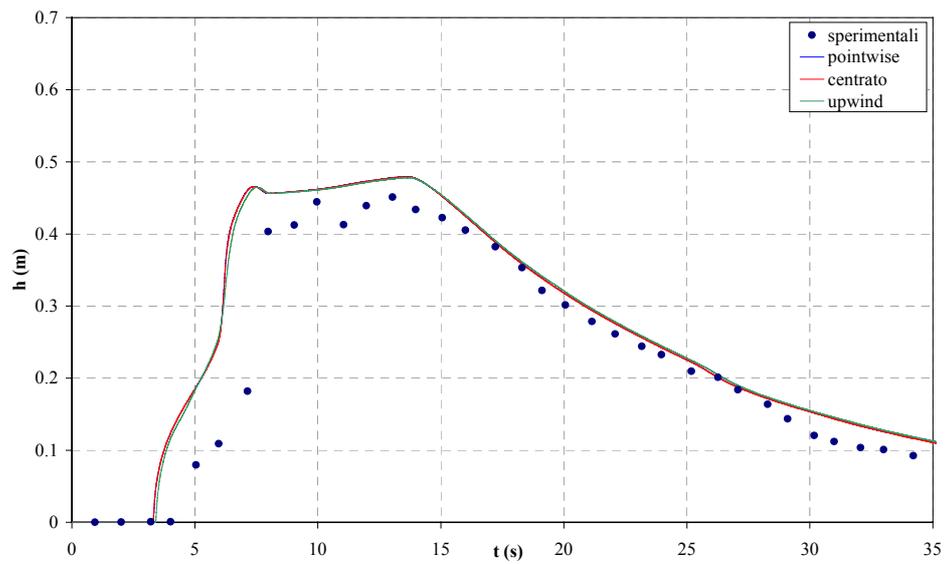


Figura 6.25c– Prove H1-idrogrammi dei livelli calcolati e misurati G11

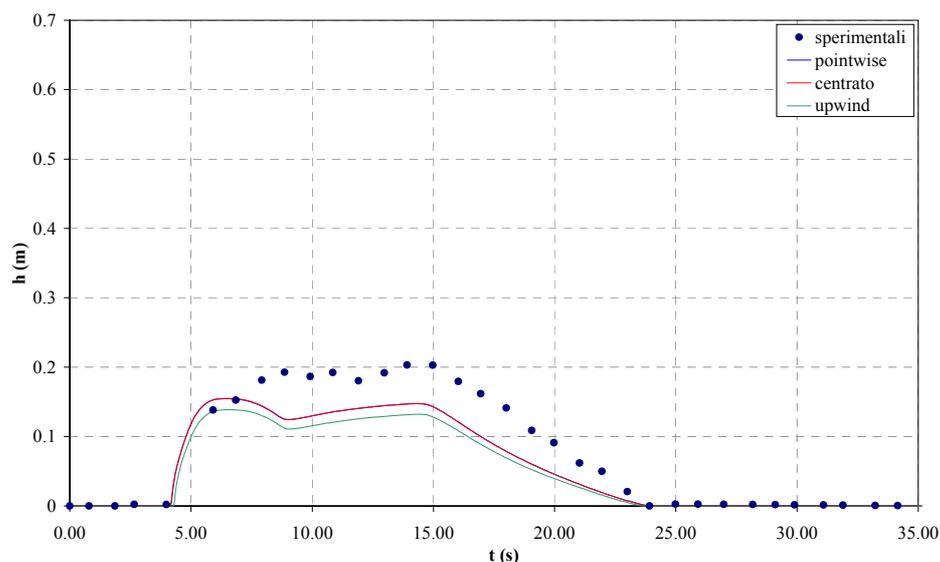


Figura 6.25d– Prove H1-idrogrammi dei livelli calcolati e misurati G13

Dalle figure 6.25(a)-(d) si nota un buon accordo tra soluzioni numeriche e dati sperimentali, soprattutto per quelle sezioni a monte dell'ostacolo (G4). C'è infatti un buon accordo sia sui valore dei livelli misurati che sui tempi di propagazione. La figura 6.25d si riferisce al punto di misura G13 a valle dell'ostacolo. In questo caso il codice numerico simula correttamente i tempi di propagazione ma il livello massimo di tirante idrico risulta sottostimato.

Il trattamento del termine sorgente upwind fornisce risultati significativamente più accurati nella sezione in corrispondenza della sommità dell'ostacolo triangolare.

6.1.4.5. Laboratorio VAW (Chevret e Dalleves 1970)

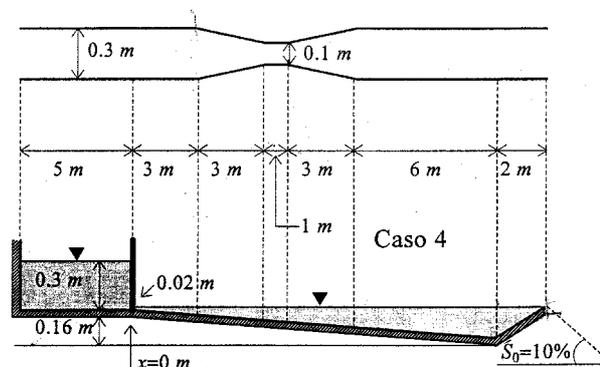


Figura 6.26- Laboratorio VAW- Descrizione dell'apparato sperimentale

Le prove sperimentali sono state condotte nel laboratorio VAW a Zurigo da Chevret and Dalleves.

Nel test simulato (test4, vedi fig.6.26) a valle della paratoia la sezione si restringe e poi si allarga nuovamente, il tratto finale è in contropendenza (10%) in modo da permettere la formazione di un letto bagnato. La canaletta era lunga 23 m il tirante idrico iniziale era 0.3 m, il coefficiente di Manning era 0.014 m^{-1/3} s. La paratoia era posizionata alla progressiva x=5 m.

Visto che nell'articolo originale non erano specificate le condizioni al contorno di valle, nei calcoli il canale è stato esteso più della sua lunghezza reale. Il dominio è stato diviso in 231 sezioni di calcolo poste ad un interasse di 0.1 m, il CFL adottato nelle simulazioni è 0.5.

In Figura 6.27 sono confrontati gli idrogrammi del livello idrico misurati e calcolati in due sezioni trasversali, P1 (x=-4m) e P2 (x=1 m).

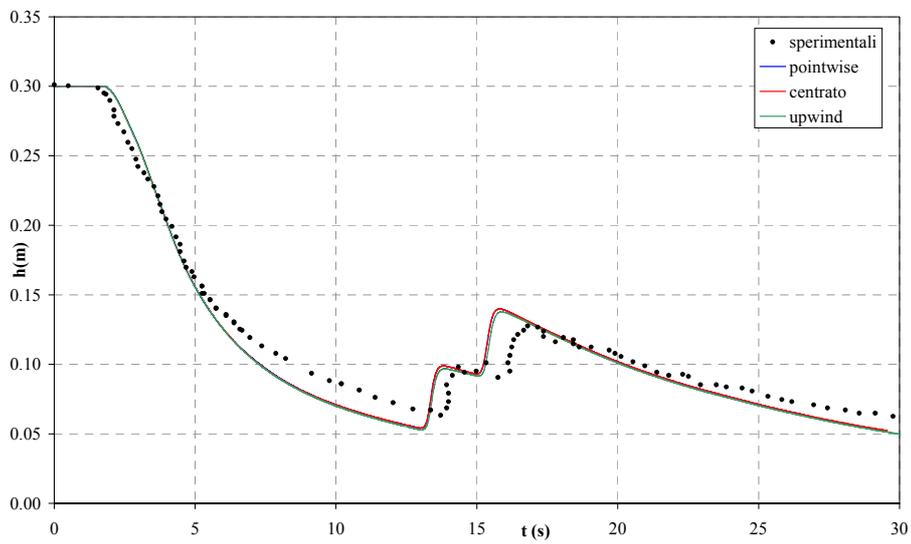


Figura 6.27a- Prove V1- idrogrammi del livello misurati e calcolati in P1

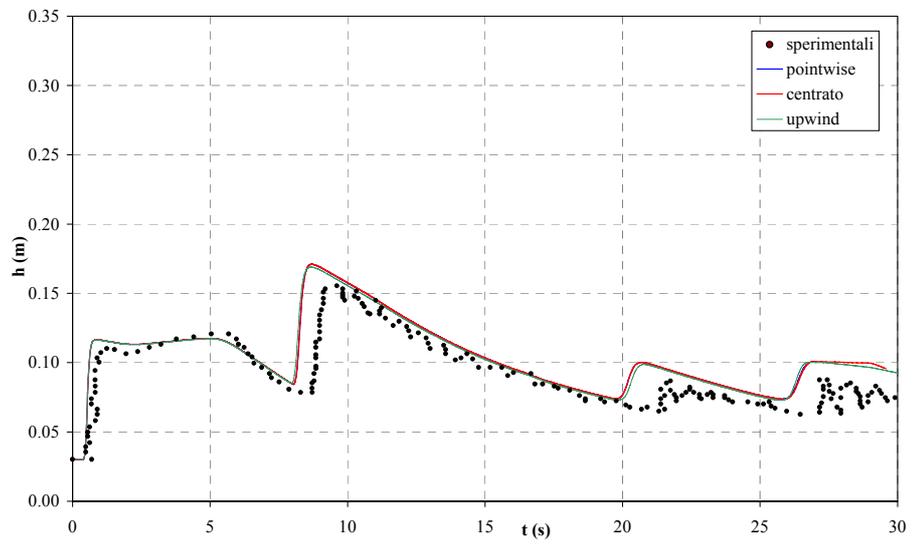


Figura 6.27b- Prove V1- idrogrammi del livello misurati e calcolati in P2

In questa applicazione pratica le differenze tra le diverse schematizzazioni del termine sorgente risultano marginali, entrambi riescono a riprodurre correttamente le riflessioni dell'onda e le celerità di propagazione del moto.

Si nota comunque che l'onda simulata procede più speditamente di quella osservata.

6.1.4.6. Università della Tracia (Bellos et al 1992)

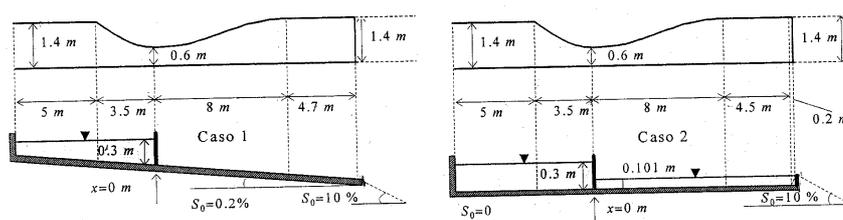


Figura 6.28-a,b- Università della Tracia- Descrizione degli apparati sperimentali

Le prove sperimentali studiate erano state condotte da Bellos, Soulis e Sakkas nel dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università della Tracia e riguardano prove di Dam-break su canali non prismatici (vedi fig.6.28). La geometria del canale è non simmetrica, con sezione trasversale variabile.

Molti autori hanno simulato queste prove con codici di calcolo basati su modelli matematici bidimensionali. Nel nostro caso si è applicato un modello 1D. E' importante enfatizzare che in questo caso il rapporto tra tirante idrico a monte e a valle della paratoia è 2.33, valore che si trova comunemente nelle applicazioni pratiche, per esempio nella parte bassa dei depositi alluvionali.

Nel seguito si descrivono le simulazioni relative all'apparato sperimentale della figura 6.28 b, il canale è orizzontale, il tirante idrico iniziale è 0.3 m a monte dello sbarramento, a valle è 0.101 m. Alla sua estremità il canale è chiuso con un muro avente la stessa altezza del tirante idrico a valle. Per simulare in

modo efficiente l'effetto di quest'ultimo il canale è stato prolungato con una pendenza del 10% in modo da simulare uno stramazzo. Il coefficiente di Manning adottato è $0.012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$. Il dominio di calcolo è stato diviso in 213 sezioni poste ad un interasse di 0.1 m, il CFL utilizzato nelle elaborazioni è 0.7.

La Fig 6.29 si riferisce al test n.2 e mostra gli idrogrammi dei livelli calcolati e misurati nelle sezioni di misura S1 ($x=-8.5\text{m}$), S2 ($x=-2.5\text{m}$), S3 ($x=0.0$), S4 ($x=5\text{m}$).

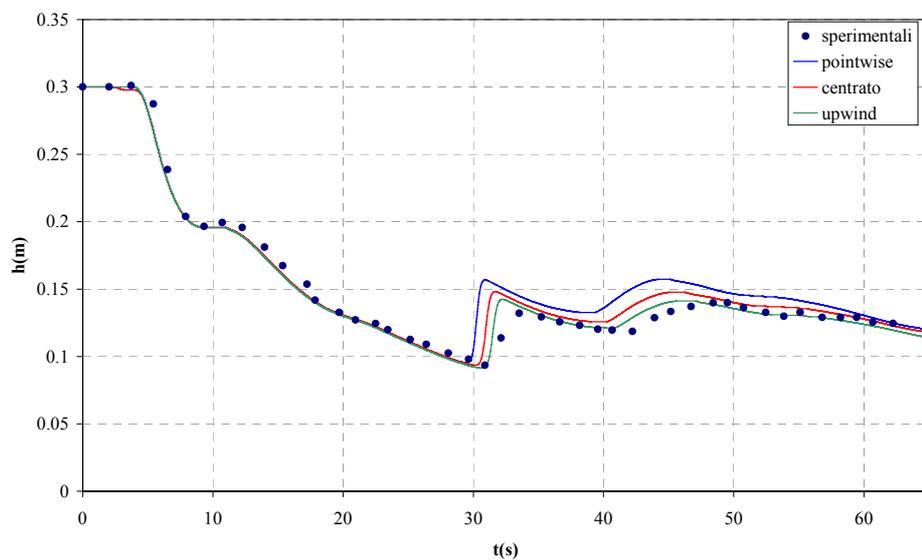


Figura 6.29a -Prova B2- idrogrammi dei livelli misurati e calcolati in S1

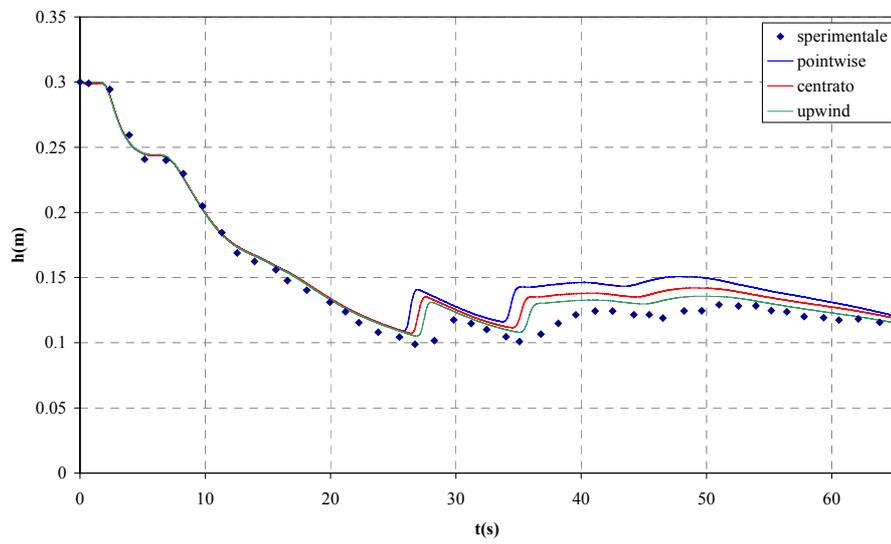


Figura 6.29b -Prova B2- idrogrammi dei livelli misurati e calcolati in S2

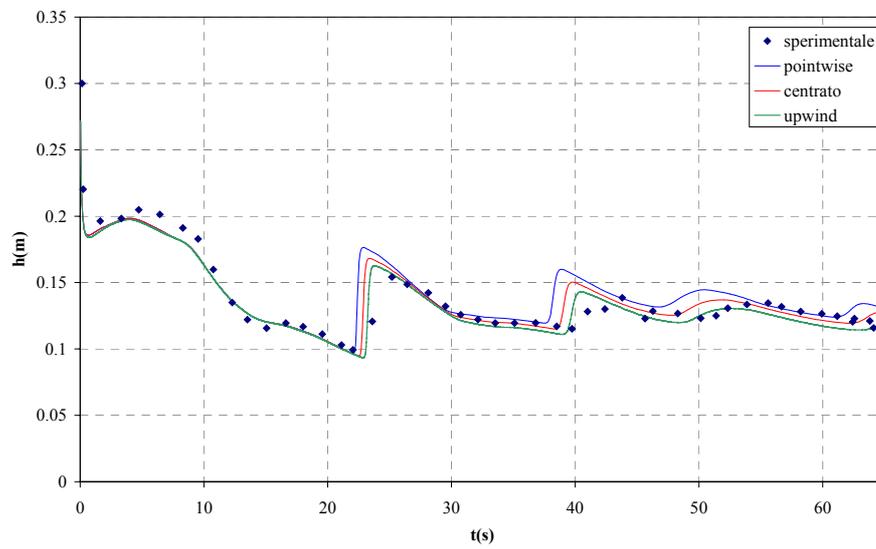


Figura 6.29c -Prova B2- idrogrammi dei livelli misurati e calcolati in S3

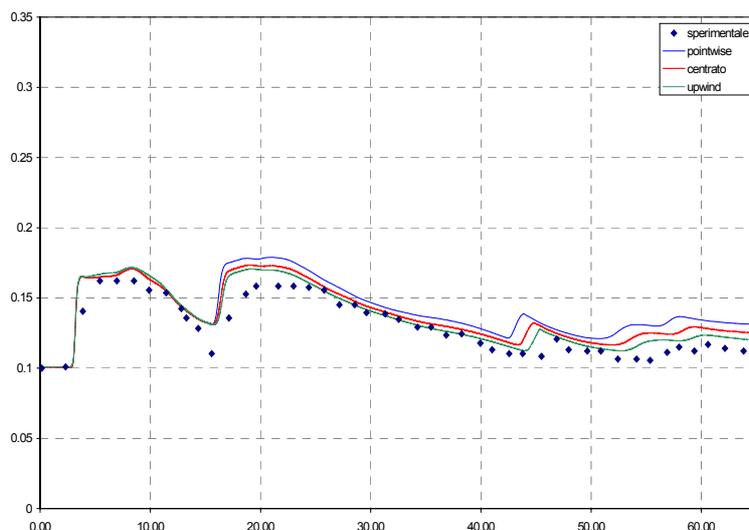


Figura 6.29d -Prova B2- idrogrammi dei livelli misurati e calcolati in S4

Come si vede dalle figura 6.29 (a)..(d) il trattamento upwind risulta molto più accurato nella simulazione delle riflessioni in un caso così complesso, dove oltre alla pendenza di fondo bisogna tenere in conto anche non prismaticità del canale. Riesce infatti a riprodurre con maggior precisione sia le celerità di propagazione dell'onda che i valori dei livelli idrici raggiunti nel tempo.

6.1.4.7. Prove LNEC (Hiver 2000)

Lo schema del canale di laboratorio è mostrato nella figura 6.30

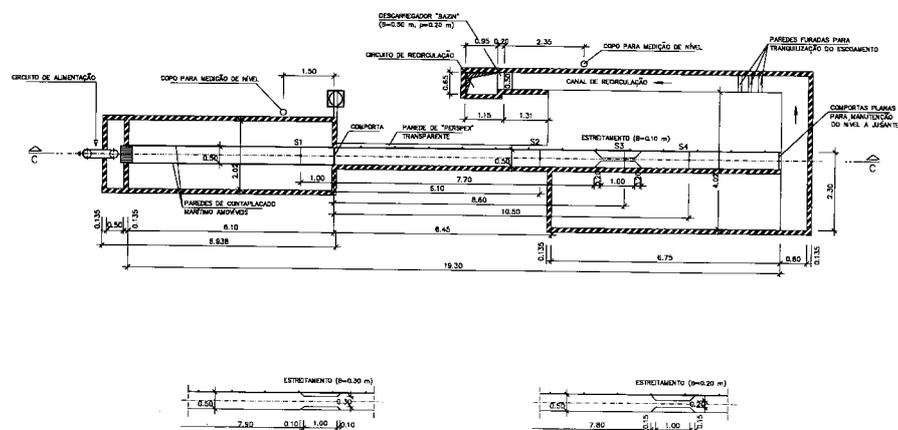


Figura 6.30-Descrição aparato sperimentale

Il canale è lungo 19.30 m ed è orizzontale. La sezione trasversale è di 0.5 m. La paratoia è posizionata all'ascissa 6.10 m. A valle è presente una contrazione lunga 1 m e larga 0.1 m che determina una parziale riflessione ed un successivo rallentamento nella propagazione dell'onda di dam-break.

Le pareti longitudinali e il fondo della canaletta sono di plexiglas, nelle elaborazioni numeriche è stato adottato il valore del coefficiente di Manning pari a 0.01, come suggerito dagli autori delle prove. Come condizioni iniziali si

è posto un livello di 0.3 m all'interno del serbatoio ed uno strato di acqua ferma di 0.003 m a valle dello stesso.

Il dominio è stato discretizzato in 387 sezioni con un passo di discretizzazione spaziale di 5 cm come suggerito dalle specifiche del CADAM. Il CFL utilizzato è 0.7.

Si sono determinati gli andamenti dei livelli idrici in 4 sezioni, due a monte (S1, S2) e due a valle (S3, S4) del serbatoio.

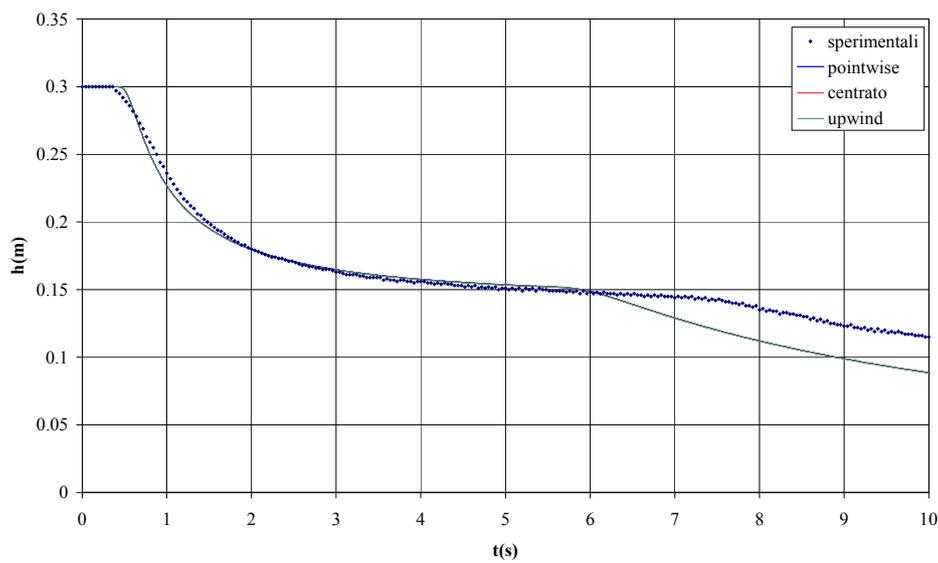


Figura 6.31a- Prova L1- Andamento dei livelli misurati e calcolati S1

La figura 6.31a si riferisce ad una stazione di misura all'interno del serbatoio. Rappresenta quindi lo svuotamento del serbatoio successivo all'apertura della paratoia. Come si vede fino a 6 secondi il fenomeno osservato è quello di propagazione a monte dell'onda negativa, mentre dopo i 6 secondi si ha uno svuotamento repentino dovuto alla riflessione in corrispondenza dell'estremità a monte del serbatoio. Fino a 6 s non si nota particolare discrepanza tra simulazioni e dati sperimentali, mentre a partire da questo istante di tempo l'onda simulata si propaga più velocemente di quella osservata.

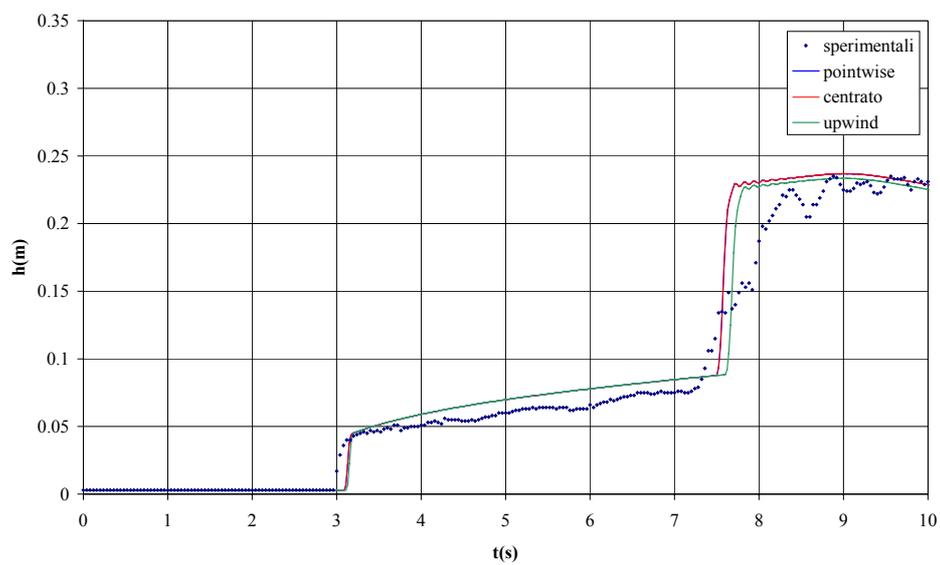


Figura 6.31b- Prova L1- Andamento dei livelli misurati e calcolati S2

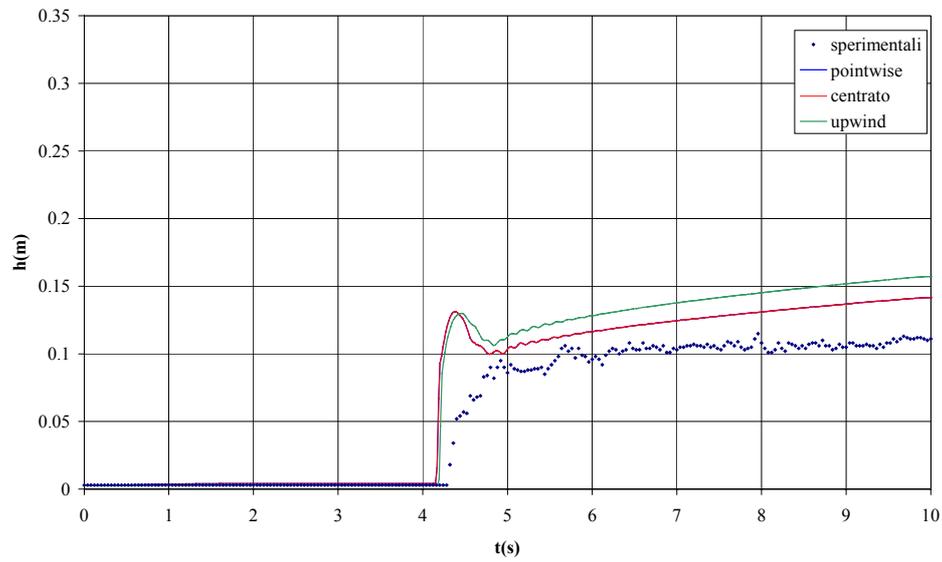


Figura 6.31c- Prova L1- Andamento dei livelli misurati e calcolati S3

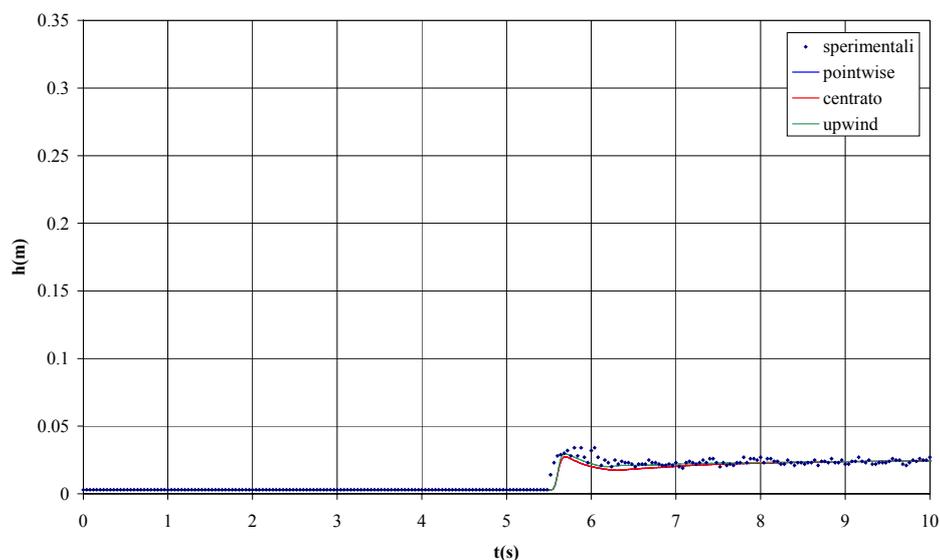


Figura 6.31d- Prova L1- Andamento dei livelli misurati e calcolati S4

La stazione S2 si trova immediatamente a monte del restringimento; l'innalzamento del pelo liquido dovuto alla riflessione è simulato correttamente. La stazione S3 si trova all'interno del restringimento, si nota in questo caso una sovrastima dei livelli calcolati. Una spiegazione può essere dovuta correlando questi risultati con quelli della stazione S1. Se l'onda simulata procede più velocemente di quella osservata, il volume sovrastimato simulato che fuoriesce dal serbatoio rallenta nel restringimento e causa un innalzamento ulteriore del pelo liquido rispetto a quello osservato. Nella stazione S4 si osserva una buona concordanza tra simulazioni e dati osservati.

6.1.4.8. Prove Hydraulic Laboratory Reserach–Chatelet (Bento Franco e De Almeida 2000)

Nella figura 6.32 è mostrata la descrizione dell'apparato sperimentale

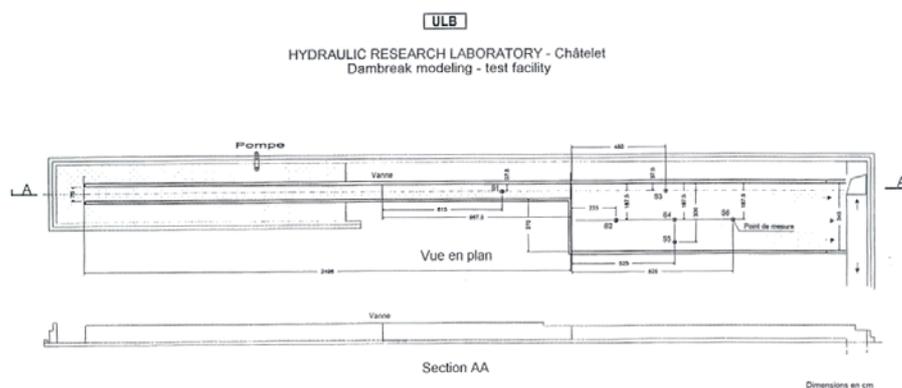


Figura 6.32-Descrizione apparato sperimentale

Il canale è rettangolare a monte con un allargamento improvviso non simmetrico a valle.

Il canale è orizzontale, lungo 38 m e la parte a monte è larga 0.75 m. La paratoia è localizzata alla sezione 9.67 dalla discontinuità di valle. La parte a monte del canale è lunga 15.28 m. L'improvviso allargamento è posizionato a 9.67 m dalla paratoia. La zona più larga è larga 3.45 m e lunga 13.04 m, in questo modo il rapporto tra larghezza a monte e valle è 4.6. L'acqua nel serbatoio è inizialmente ferma e la superficie libera è a 0.75 m, a valle c'è un tirante di 0.15 m.

Il coefficiente di Manning utilizzato nelle elaborazioni è 0.011, come suggerito dagli autori, il dominio di calcolo è stato suddiviso in 387 sezioni poste ad un interasse di 0.05 m, il CFL utilizzato è 0.5.

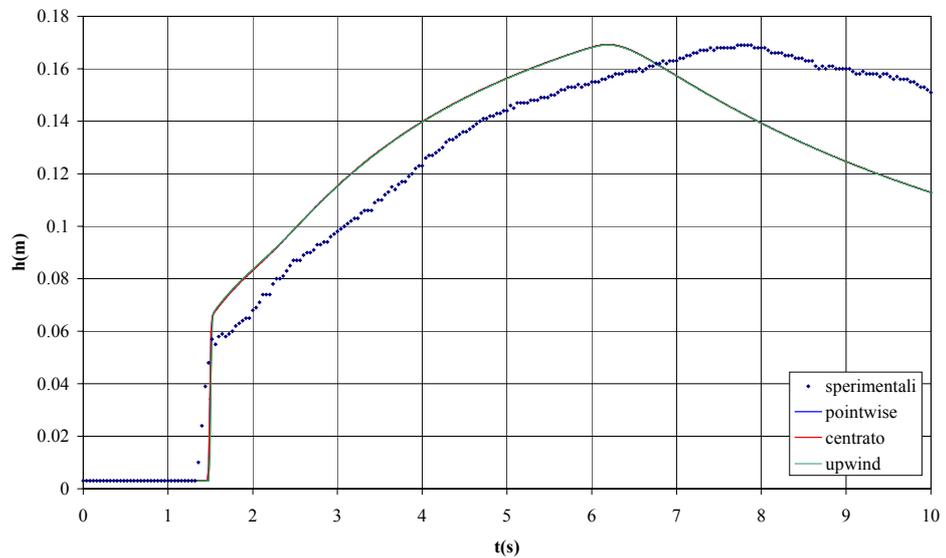


Figura 6.33a-Prova CH1- Andamento dei livelli misurati e calcolati P1

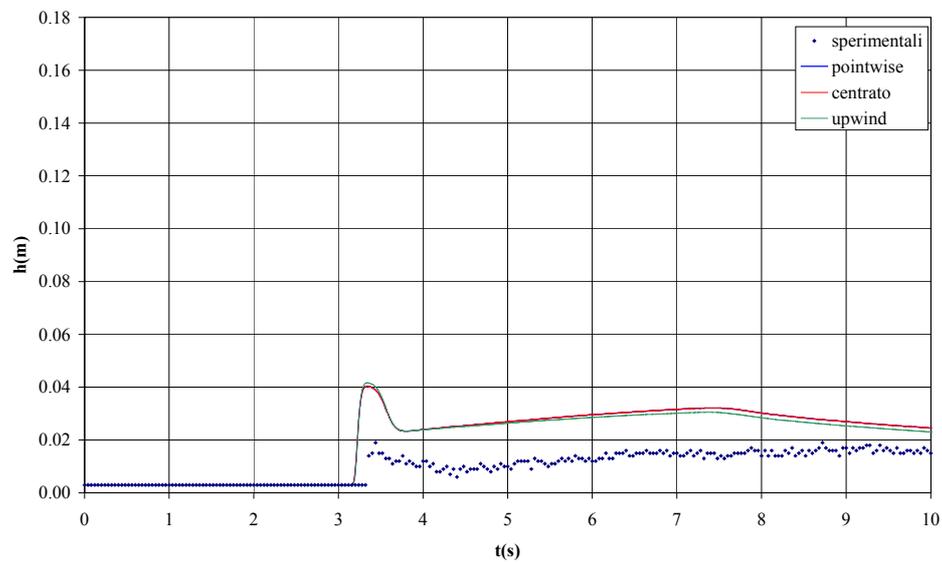


Figura 6.33b-Prova CH1- Andamento dei livelli misurati e calcolati P2

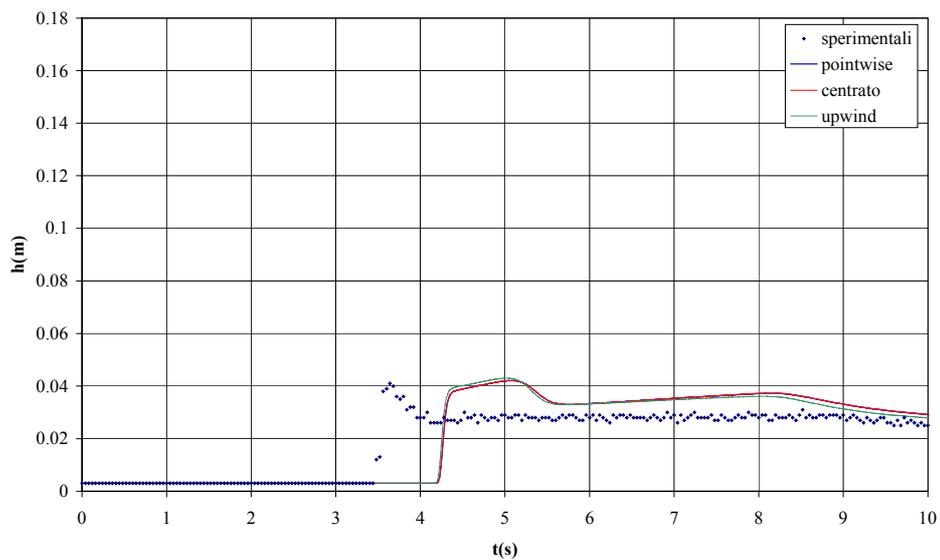


Figura 6.33c-Prova CH1- Andamento dei livelli misurati e calcolati P3

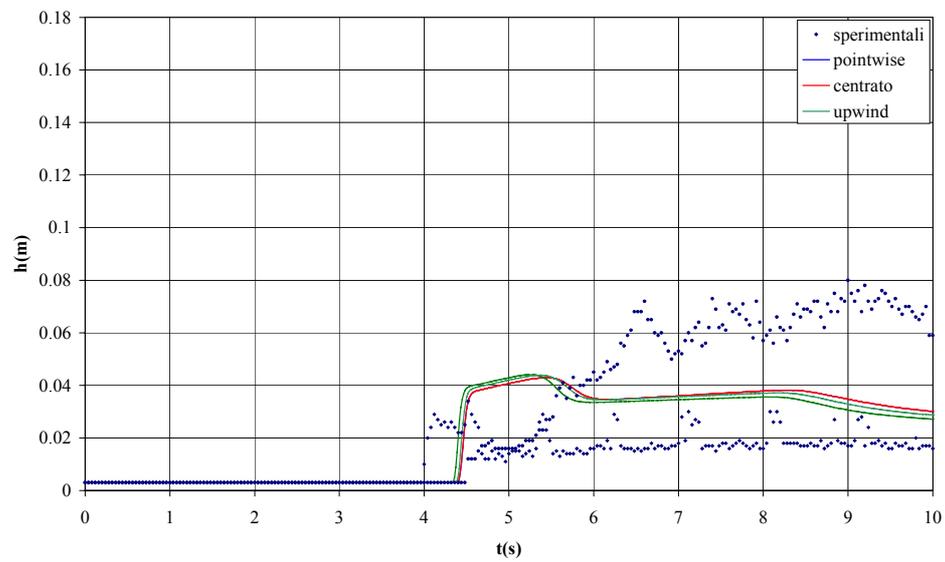


Figura 6.33d-Prova CH1- Andamento dei livelli misurati e calcolati P4-P5

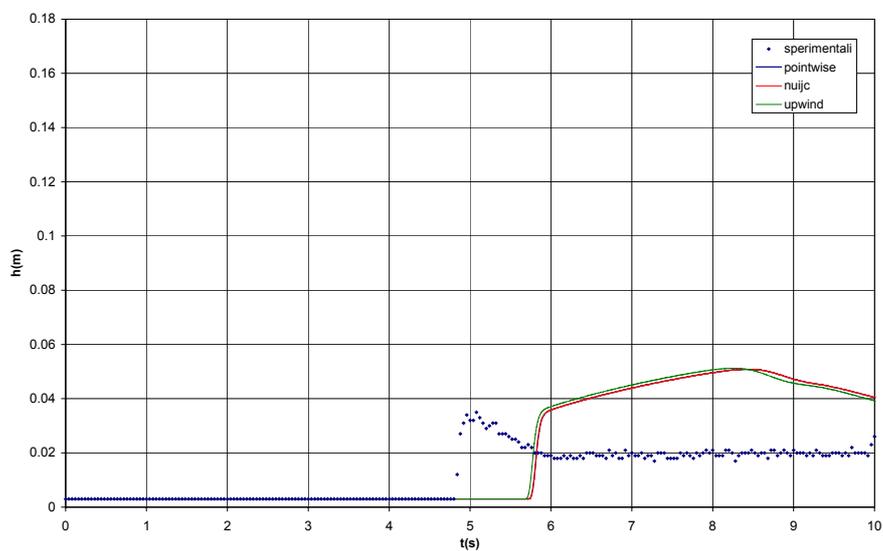


Figura 6.33 e-Prova CH1- Andamento dei livelli misurati e calcolati P6

Come ci si aspettava il codice monodimensionale non è in grado di riprodurre correttamente la propagazione del fronte in corrispondenza dell'allargamento, in quanto il fenomeno è spiccatamente bidimensionale. Le maggiori differenze tra idrogrammi misurati e calcolati si vedono soprattutto nelle sezioni al valle dell'allargamento (fig. 6.33c, fig. 6.33d, fig. 6.33e). Differenze tra le tre schematizzazioni del termine sorgente non sono invece così evidenti.

In particolare in figura 6.33d si notano due gruppi di dati sperimentali. Si riferiscono alla stessa progressiva ma a distanze diverse dall'asse del canale. Nella simulazione con il codice monodimensionale si riscontrano livelli compresi tra i due insiemi di dati sperimentali.

Le ultime due prove (6.1.4.7 e 6.1.4.8) saranno simulate in seguito anche con il codice bidimensionale.

6.1.5. Prove con bruschi restringimenti

I test che seguono sono quelli che hanno messo maggiormente alla prova i solutori numerici implementati. Sono infatti caratterizzati da bruschi restringimenti, dove la sezione in pochi centimetri si dimezza, o dalla presenza di ostacoli come paratoie. In questo caso la scrittura delle Shallow Water Equations non è in grado di rappresentare correttamente le perdite di carico a cavallo della singolarità. Per questo motivo le prove sono state simulate inserendo le condizioni al contorno interne, già illustrate nel capitolo 5.

6.1.5.1. Prove WES (Chen 1980)

Tra tutte le prove fin ora simulate risultano tra quelle meno recenti (1980), ma sono state prese in considerazione perché rappresentano le uniche prove sperimentali presenti in letteratura dove la simulazione dell'onda di Dam-break avvenga in corrispondenza di una strettoia molto pronunciata.

Nel caso in esame la sezione della canaletta è ridotta ad un decimo di quella in assenza di restringimento (vedi figura 6.34).

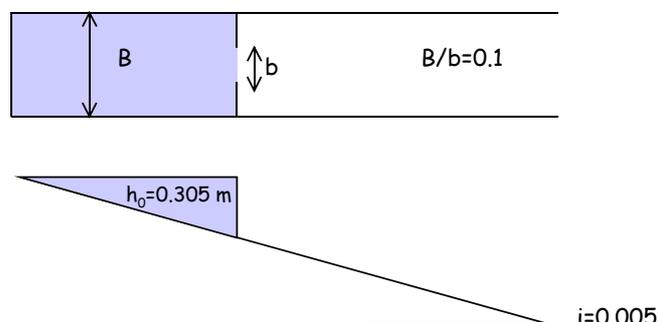


Figura 6.34-Pianta e vista longitudinale dell'apparecchiatura sperimentale

La propagazione avviene su letto inclinato avente pendenza dello 0.5%. Il tirante idrico nella sezione della diga è 0.305m. Il coefficiente di resistenza al moto di Manning adottato per le simulazioni numeriche è $0.009 \text{ ms}^{-1/3}$. Il dominio è stato scomposto in 105 sezioni di calcolo di interasse medio 1.22 m, il numero di Courant utilizzato per i calcoli è stato 0.7.

I dati sperimentali a disposizione erano costituiti dagli idrogrammi dei livelli in sei sezioni, tre all'interno del serbatoio e tre al di fuori dello stesso.

Come si vede nella figura 6.35a il trattamento pointwise del termine sorgente non è in grado di simulare correttamente la strettoia sovrastimando la portata che esce dalla breccia e sottostimando i livelli nelle sezioni all'interno del serbatoio; conseguentemente le onde simulate procedono più speditamente di quelle osservate. Solo il trattamento sorgente di tipo upwind che soddisfa l'equazione di bilancio di quantità di moto riesce a riprodurre il fenomeno. Per migliorare il comportamento degli schemi numerici presi in esame è stato necessario trattare il passaggio attraverso la strettoia come una condizione al contorno interna. Il campo di moto nelle due sezioni a cavallo della strettoia è stato calcolato tramite una scala di deflusso di moto permanente, calcolata applicando l'equazione globale dell'equilibrio idrodinamico a un volume di

controllo a cavallo della strettoia. La sezione di controllo è localizzata in corrispondenza del restringimento e i livelli a monte a valle della strettoia dipendono dalla sola portata. Nei calcoli non è stato considerato l'effetto della contrazione della vena; si sono inserite delle perdite di carico opportune in modo da poter simulare con un solutore monodimensionale il passaggio attraverso la strettoia. Come si vede dalla figura 6.35b i risultati ottenuti sono molto soddisfacenti.

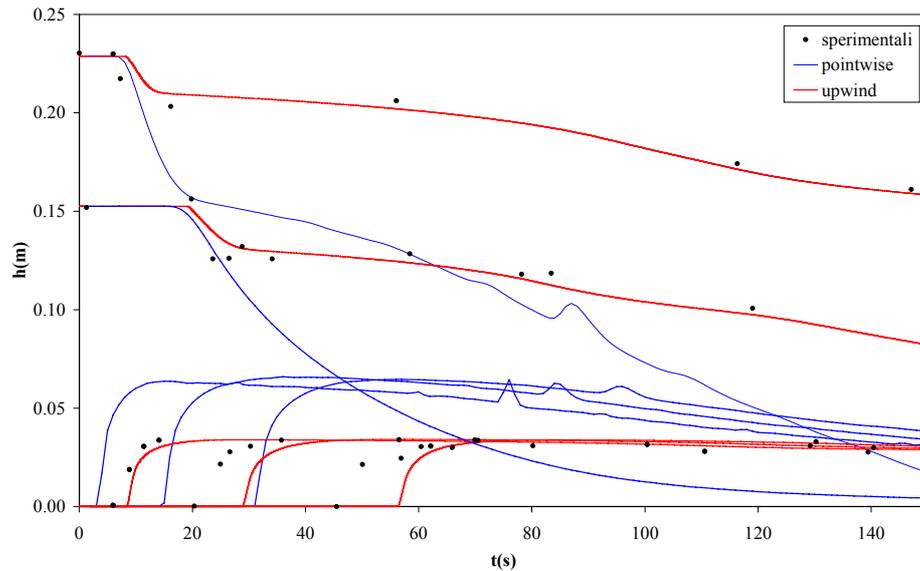


Figura 6.35(a)- Confronto tra idrogrammi misurati e calcolati senza cc int

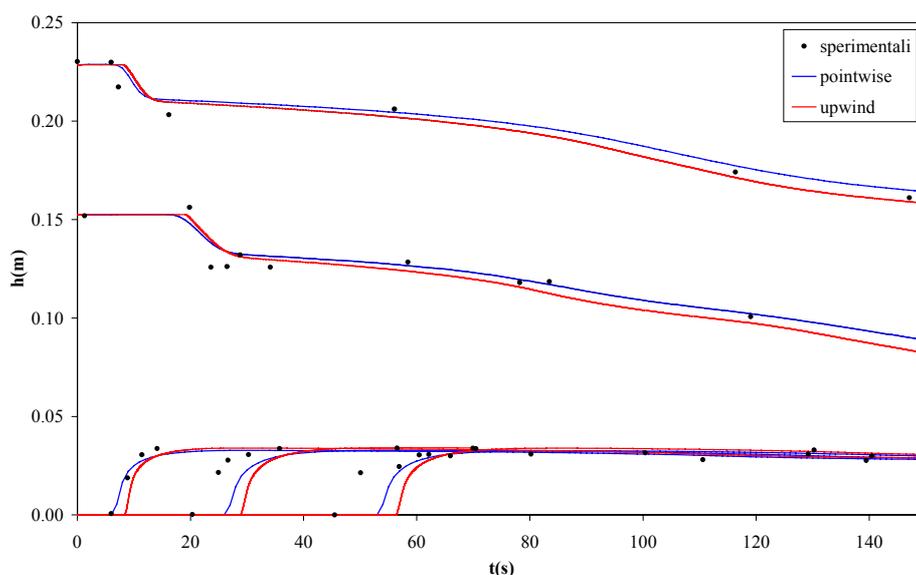


Figura 6.35(b)- Confronto tra idrogrammi misurati e calcolati con cc int

6.1.5.2. Prove condotte all'Università di Pavia-(Natale et al 2004)

Per studiare meglio il deflusso attraverso una strettoia, nell'ottica dell'applicazione del solutore numerico al caso della rottura di uno sbarramento artificiale in un alveo naturale, dove le sezioni trasversali possono essere ridotte a causa delle presenza di manufatti come ponti, si è ritenuto necessario sviluppare nel lavoro di tesi una serie di prove sperimentali nel laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale dell'Università di Pavia. Si è ripresa la canaletta già descritta (Manciola et al 1995) e si è inserita al posto della seconda paratoia una strettoia che riduce a metà la sezione trasversale.

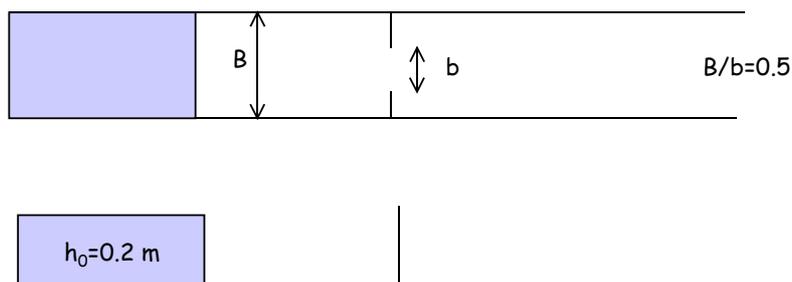


Figura 6.36-Università di Pavia- Descrizione dell'apparato sperimentale

Con una telecamera che registra 25 fotogrammi al secondo si è filmato l'andamento del pelo liquido in un intorno della strettoia stessa; le immagini sono state digitalizzate successivamente per determinare a vari istanti di tempo il profilo del pelo liquido in corrispondenza della singolarità idraulica. Si è scelto un livello nel serbatoio di 20 cm e a valle è stata posta una paratoia avente 5 cm di luce.

Nella simulazione del deflusso in corrispondenza del manufatto si è disconnesso il dominio di calcolo dalle sezioni a monte e a valle della strettoia, che sono state trattate separatamente imponendo le perdite di carico attraverso una scala di deflusso di moto permanente. La scala di deflusso attraverso la strettoia è stata ricavata da indagini sperimentali misurando, per un regime di portata stabilito, i livelli a monte e valle della singolarità, una volta ristabilita la condizione di moto permanente.

Si riportano nelle figure seguenti i confronti tra le immagini registrate dalla telecamera e i profili di pelo liquido simulati a cavallo della strettoia.

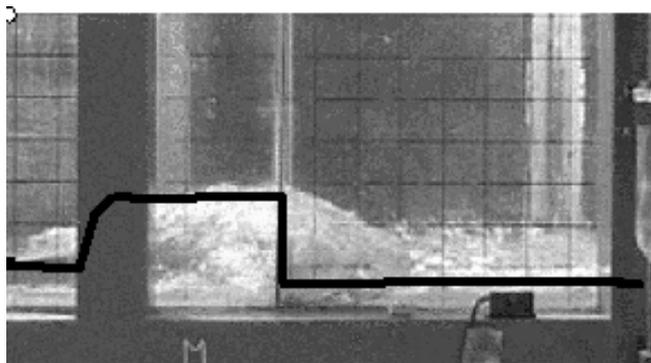


Figura 6.37a-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=3.2s$

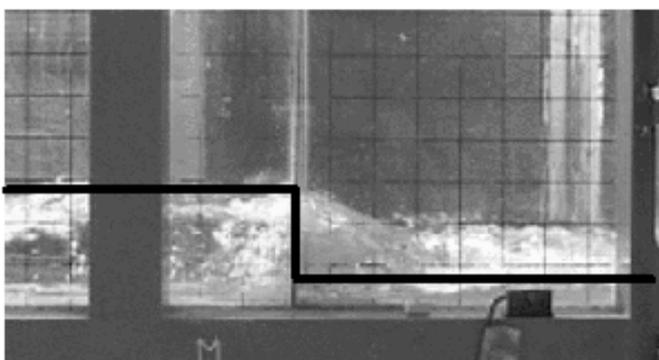


Figura 6.37b-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=4.0s$

Come si vede dalle figure 6.37a-b si nota un buon accordo tra dati sperimentali e simulazione. Per i primi istanti di tempo in cui l'onda impatta contro la strettoia si nota una sottostima del livello raggiunto, ma questo deve essere messo in conto nell'applicazione di un modello matematico che non tiene conto ne delle accelerazioni verticali ne dell'aria che viene inglobata dalla corrente.

6.1.5.3. Prove condotte all'Università di Pavia-2

Una seconda serie di prove sperimentali sono state eseguite simulando il deflusso attraverso due paratoie poste in serie e distanti tra di loro circa un metro. Questo tipo di esperimento è stato condotto per verificare se l'inserimento di condizioni al contorno interne potesse far simulare ad un codice numerico il passaggio attraverso lo stato critico e il rigurgito a monte della paratoia. La luce della prima paratoia è 4 cm e la seconda è stata tenuta inizialmente alzata, successivamente la luce è stata portata a 2 cm.

La scala in moto permanente è stata ricavata analiticamente dalle curve che legano il coefficiente di efflusso in funzione del livello a monte della paratoia stessa (Ven Te Chow 1959). La curva così ottenuta è stata confrontata con i dati sperimentali in moto permanente. Come si vede dalla figura 6.38 l'accordo tra le due curve è buono.

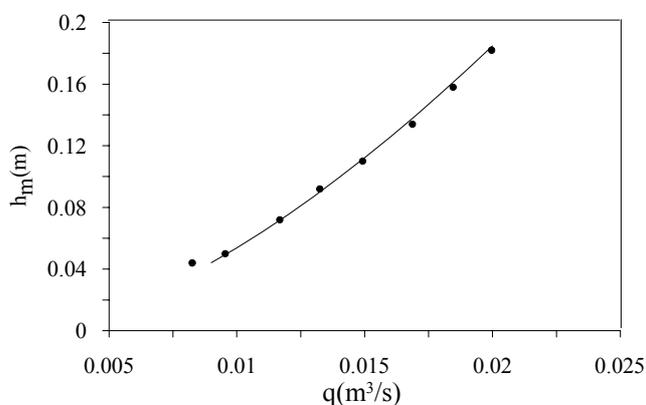


Figura 6.38- Scala di moto permanente della paratoia di monte

Nelle fig 39.a-g si riportano i confronti tra immagini sperimentali e simulazioni a vari istanti di tempo.

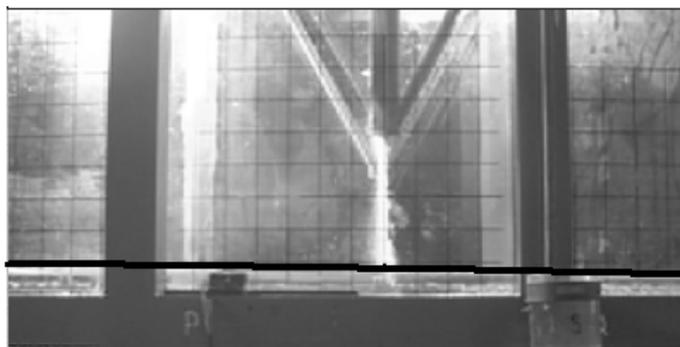


Figura 6.39a-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=4s$

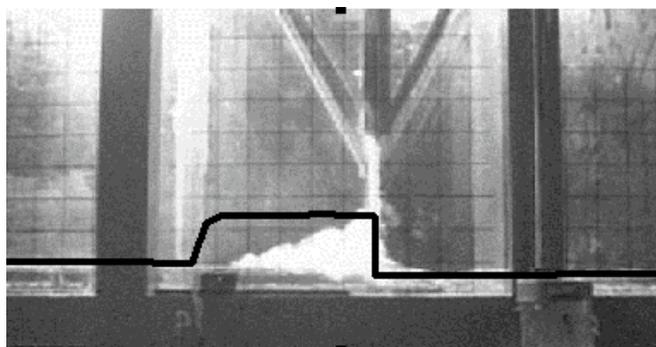


Figura 6.39b-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=5s$

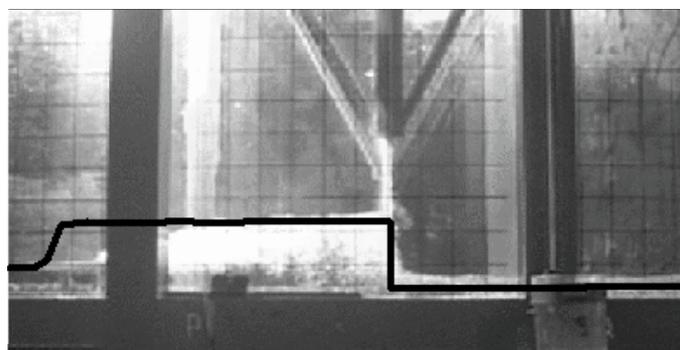


Figura 6.39c-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=6s$

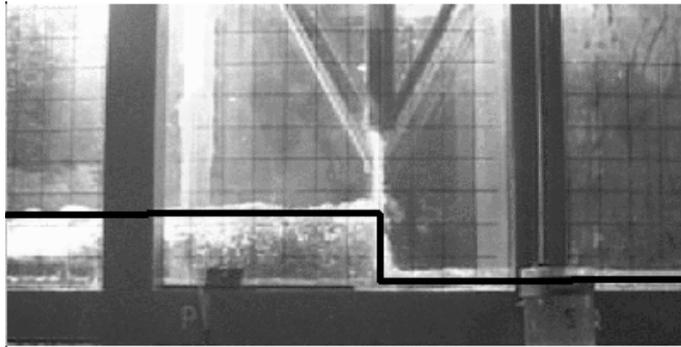


Figura 6.39d-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=7s$

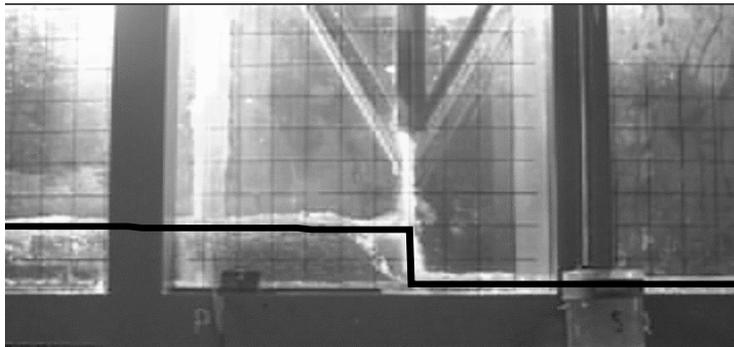


Figura 6.39e-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=8s$

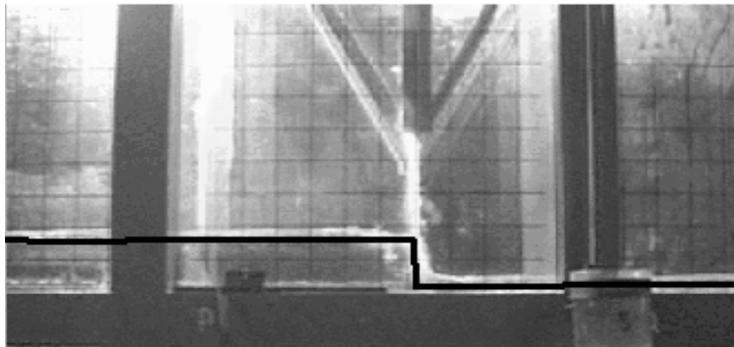


Figura 6.39f-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=9s$

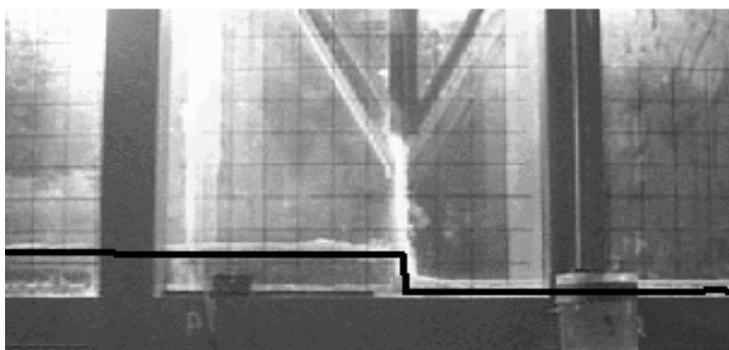


Figura 6.39g-Confronti immagini sperimentali –profili simulati t=10s

Dai confronti con le immagini sperimentali si nota un buon accordo con le simulazioni, tranne che nei primi istanti in cui l'onda impatta con la paratoia.

La fig 6.39a si riferisce ad un istante di tempo in cui il livello in corrispondenza della paratoia è inferiore alla luce (4 cm), il modello matematico riproduce bene il passaggio in corrente veloce. Dopo 5 s la corrente impatta contro la paratoia, le discrepanze tra simulazioni e dati sperimentali sono più evidenti (fig 6.39 b e c). Bisogna comunque notare la presenza di schiuma che con un modello monofase non è possibile riprodurre. Inoltre nei primi istanti in cui l'onda incontra la paratoia le accelerazioni verticali che non vengono considerate dal modello matematico utilizzato non sono trascurabili, questo può giustificare la sottostima dei livelli simulati. Il modello sottostima anche la celerità di propagazione dell'onda verso monte (fig. 6.39 b e c). All'avanzare temporale del fenomeno la simulazione è in grado di riprodurre soddisfacentemente le osservazioni sperimentali (fig. 6.39d, e, f, g).

Si riportano ora i confronti tra le simulazioni e gli esperimenti condotti in laboratorio nel caso in cui la seconda paratoia abbia luce di 2 cm. In questo caso la paratoia di valle rigurgita il flusso fino ad annegare l'efflusso della paratoia di monte. Il regime di moto passa quindi attraverso lo stato critico.

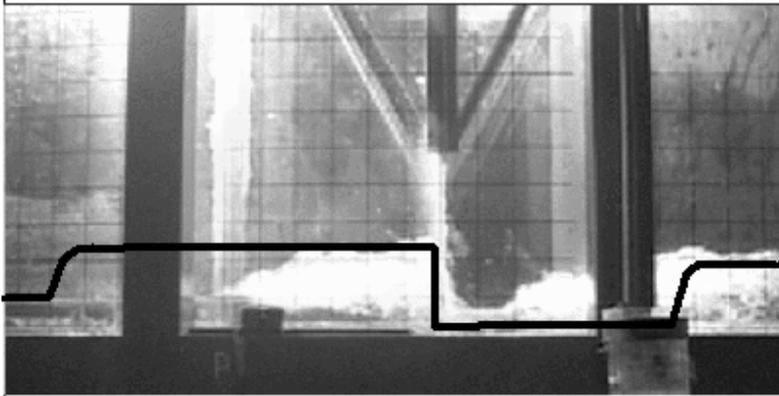


Figura 6.40a-Confronti immagini sperimentali –profili simulati t=6s

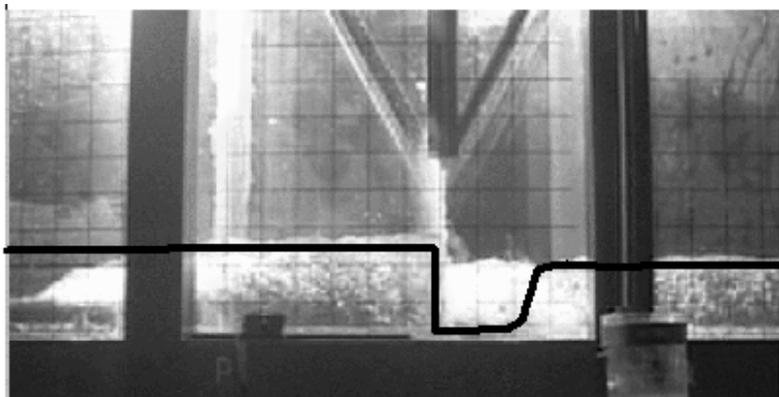


Figura 6.40b-Confronti immagini sperimentali –profili simulati t=7s

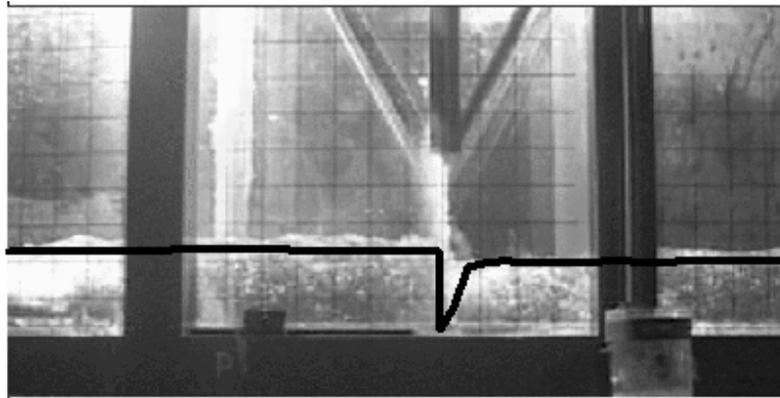


Figura 6.40b-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=7.5s$

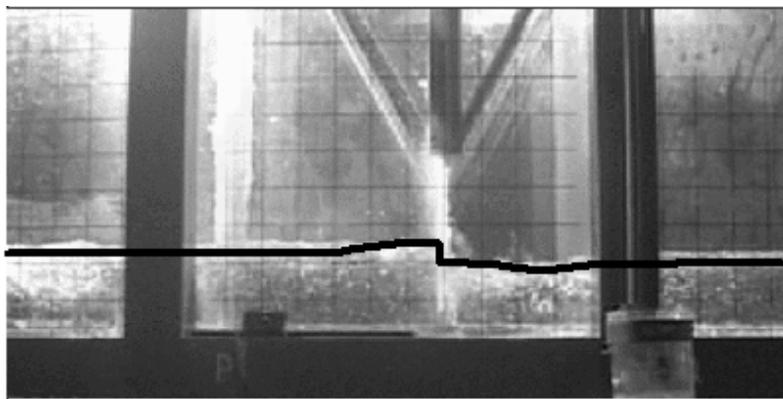


Figura 6.40c-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=7.7s$

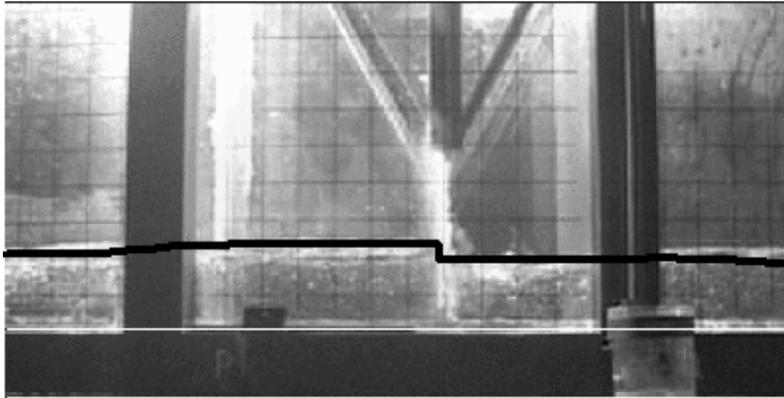


Figura 6.40c-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=8s$

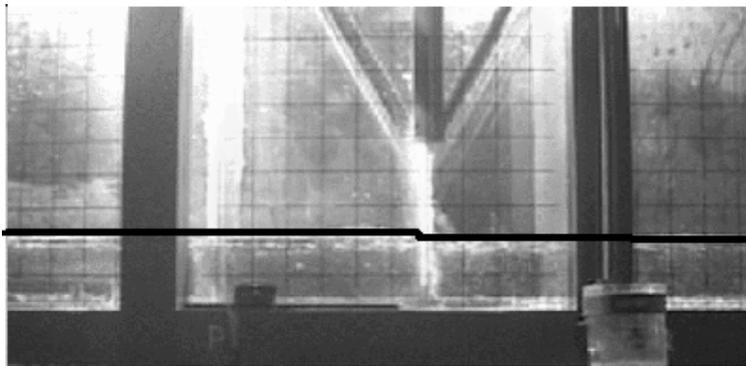


Figura 6.40d-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=9s$

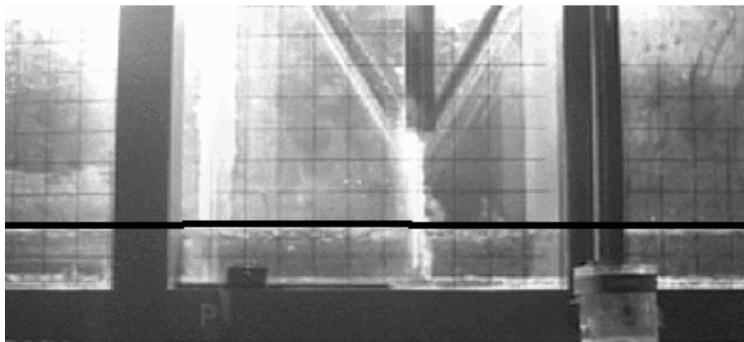


Figura 6.40e-Confronti immagini sperimentali –profili simulati $t=10s$

A parte gli istanti immediatamente successivi all'impatto della corrente con la paratoia il modello matematico riproduce in modo soddisfacente l'influenza della paratoia di valle. A 7.7 secondi l'efflusso diventa sommerso, come viene simulato dal modello. Il livello a monte si innalza appena la paratoia viene sommersa dal rigurgito di valle. Questo è simulato correttamente dal modello matematico (fig 6.40 c)

6.1.3. Applicazione al caso reale: Valle del Toce

Il modello fisico è stato ricostruito a Milano nei laboratori dell'ENEL ed è stato utilizzato per la validazione degli schemi mono e bidimensionali nell'ambito della Concerted Action on Dam-Break Modelling (CADAM) e poi successivamente anche nel progetto europeo IMPACT (Investigation of Extreme Flood Processes and Uncertainty). Si riproduce un tratto di 5 km del fiume Toce che scorre nelle Alpi (fig 6.40).

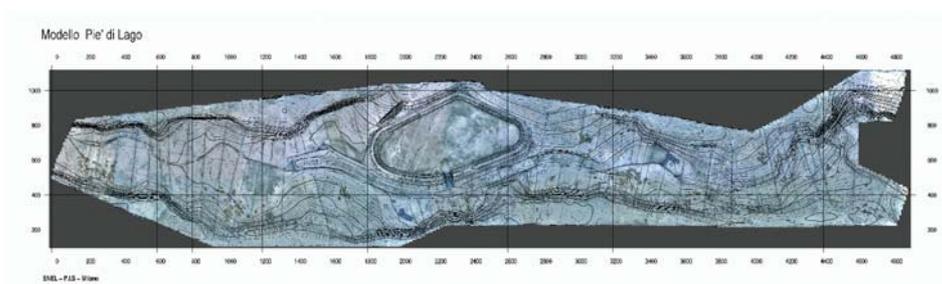


Figura 6.40-Planimetria del tratto di 5 km riprodotto al laboratorio Enel-Hydro

A causa della morfologia delle sezioni trasversali la condizione di stato critico si verifica sia a monte che a valle del tratto considerato, quindi le condizioni del deflusso al di fuori di esso possono essere trascurate.

La scala è 1:100 e l'area occupata dall'apparato sperimentale è di 55x13 m. Il modello è dotato di un circuito che può erogare una portata fino a 0.5 m³/s. Vengono misurati i livelli in 6 sezioni (p1, p4, p18, p21 e p26). Come condizioni al contorno di monte si immette un idrogramma delle portate. Il valore del coefficiente di Manning utilizzato è 0.016, come suggerito nell'ambito del CADAM. Il dominio di moto è stato schematizzato in 63 sezioni trasversali, come si vede nella figura 6.41.

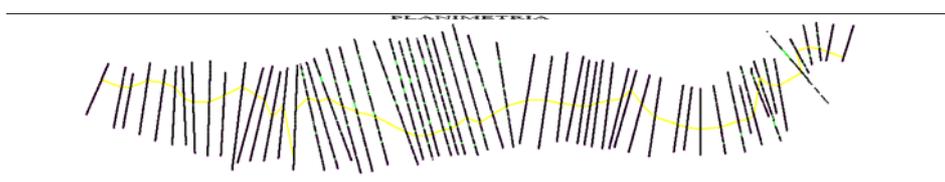


Figura 6.41-Sezioni trasversali utilizzate per il calcolo

La simulazione con il modello monodimensionale è stata condotta utilizzando un CFL di 0.8. Sono stati simulati due idrogrammi di portata in ingresso (caso A e caso B del CADAM),

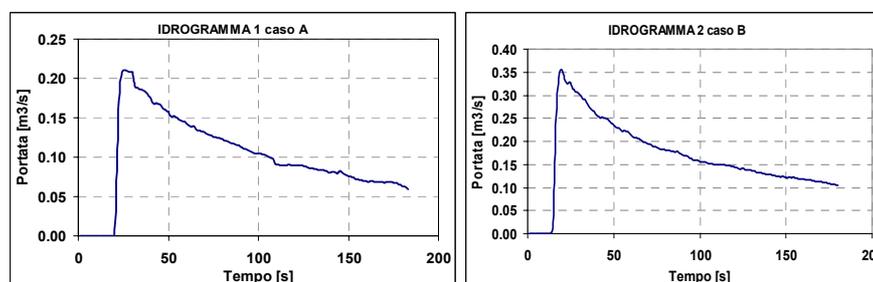


Figura 6.42 Idrogrammi in ingresso per il caso A e B

Prima di eseguire la simulazione ciascuna sezione trasversale è stata controllata e confrontata con il DTM. In particolare la sezione in corrispondenza della valle laterale è stata alzata in modo tale da considerare nei calcoli solo l'area che contribuisce effettivamente al calcolo.

Non sono stati simulati deflussi in corrispondenza della sezione del ponte o la presenza di ostacoli perché la riduzione della sezione trasversale non risultava rilevante. Si riportano nei grafici seguenti i confronti tra idrogrammi simulati e dati sperimentali nelle sezioni P1, P4, P18, P21 e P26 (ordinate da monte verso valle) per il caso A, i valori massimi delle quote di pelo liquido raggiunti nella simulazione, confrontati con i valori sperimentali, forniti dal progetto CADAM. Come si può vedere la soluzione numerica è in buon accordo con i dati sperimentali, anche nella propagazione del fronte, infatti il codice numerico riproduce in 41 secondi la propagazione dalla sezione P3 alla P61, contro i 40 secondi misurati.

Pr l'idrogramma B in ingresso la figura 6.45 si riferisce alle sezioni P1, P4, P18 e P21.

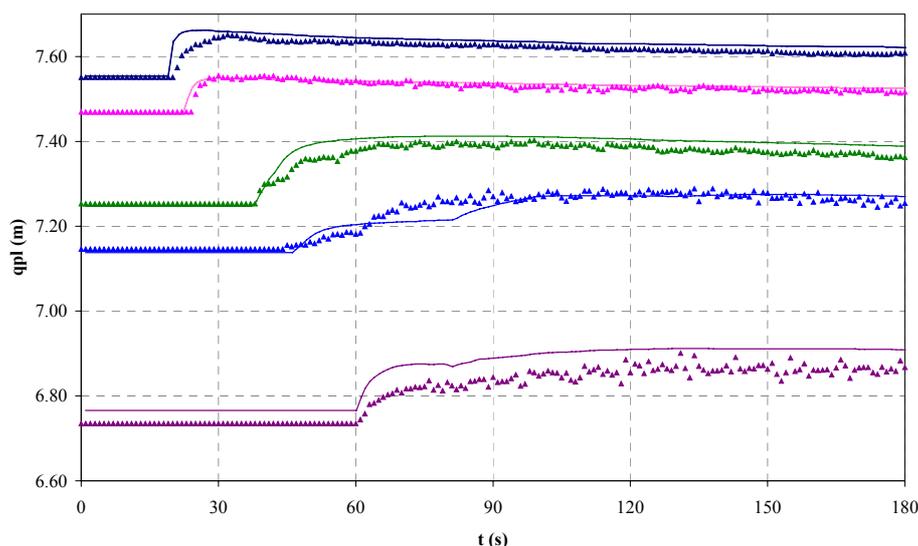


Figura 6.43-Confronto tra idrogrammi misurati –Caso A

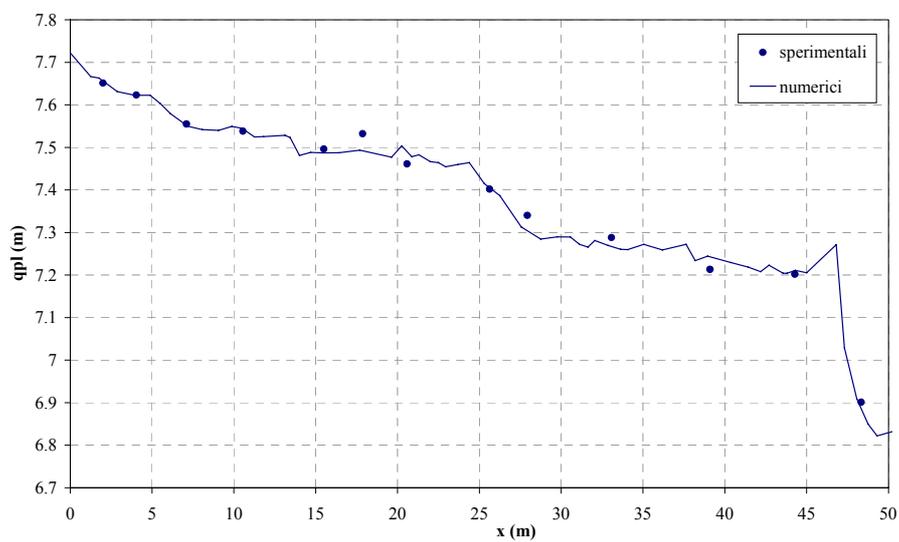


Figura 6.44 Involuppo dei valori massimi di quota di pelo liquido-Caso A

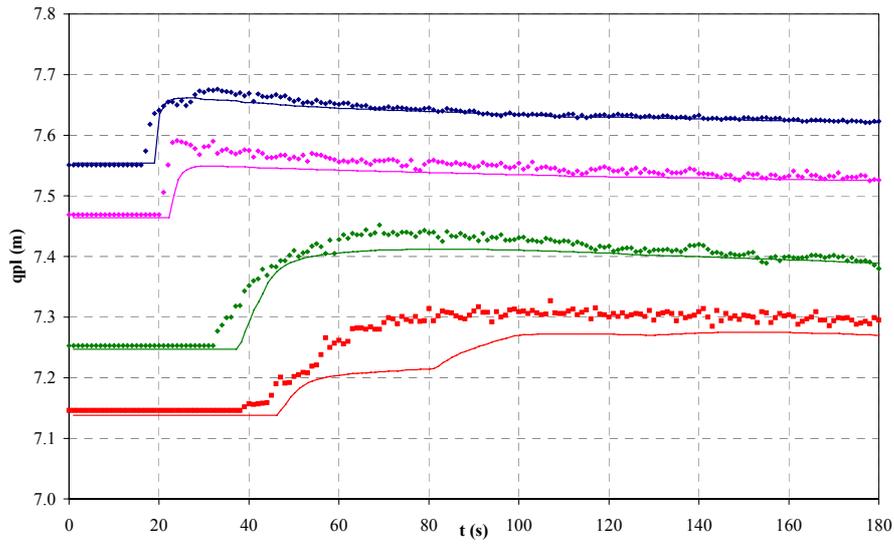


Figura 6.45-Confronto tra idrogrammi misurati –Caso B

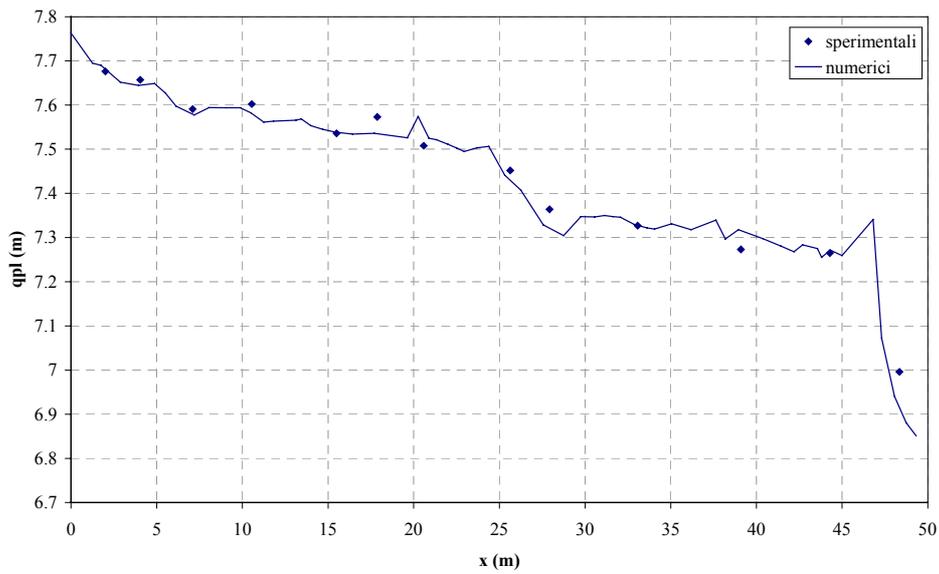


Figura 6.46 Inviluppo dei valori massimi di quota di pelo liquido-Caso B

Vista la spiccata bidimensionalità del fenomeno il modello monodimensionale riesce a simulare in modo accettabile le osservazioni sperimentali. Dalle figure 6.43 e 6.45 si nota un maggior accordo per le sezioni centrali poste in testa alla valle. Per quelle stazioni di misura poste al termine della valle, gli effetti di bidimensionalità del flusso non permettono una corretta simulazione della propagazione del fronte. Questo effetto è maggiormente visibile con il secondo idrogramma, che nella realtà provoca una rottura arginale e allaga la valle laterale.

6.2. Codice Bidimensionale

Nel processo di validazione del codice di calcolo bidimensionale si sono simulate un gran numero di prove sperimentali presenti in letteratura, che si riportano nella tabella seguente con una breve descrizione.

Laboratorio	Codice Prova	Caratteristiche
Fennema Chaudry	F1	semplice
Università di Trento	T1	semplice
Università di Pavia	PV1,2,	semplice
CITEEC- Spagna	CI1	semplice
Università di Parma(1)	PR1	Rottura arginale
Università di Parma(2)	PR2	Cambiamento pendenza
LNEC- Portogallo	L1	Contrazione
Chatelet	C1	Allargamento
UCL-Belgio	B1-B2	Canale ad L
CITEEC- Spagna	CI2	Ostacolo
Università di Pavia	PV3	Ostacolo
UCL- Belgio	U1	Ostacolo
ENEL Milano	T1	Modello in scala 1:100 di un tratto di 5 km del Toce

Tabella 6.2-Descrizione delle prove sperimentali simulate con il codice 2D

Una gran parte delle esperienze sopra descritte appartengono al progetto europeo CADAM che si è concluso nel 2000, ed una in particolare, la seconda condotta all'UCL di Louvain La Neuve fa parte del progetto europeo in corso IMPACT, i risultati sperimentali sono stati forniti prima della pubblicazione degli atti finali.

L'ultimo passo nella validazione del codice è stata la sua applicazione al caso reale della propagazione di un onda di piena in un tratto di 5 km del fiume Toce.

6.2.1. Prove su geometria semplice

Si riportano, come per il codice monodimensionale, dapprima le simulazioni ottenute per casi a geometria semplice, per i quali si è adottato prevalentemente la schematizzazione dei termini sorgente pointwise. In alcuni casi si è adottata anche la schematizzazione upwind per completezza.

6.2.1.1. Prove Fennema Chaudry (Fennema e Chaudry 1990)

Rappresenta l'esempio classico per la validazione di codici bidimensionali. La prova consiste nella simulazione dell'onda di sommersione dovuta al crollo parziale di uno sbarramento posto in posizione asimmetrica. Il fondo è orizzontale e si suppone che non esista resistenza al moto. Il livello nel serbatoio di monte è 10 m e in quello di valle è 5 m. Il dominio di calcolo è lungo 200 m e largo 200 m, la maglia di calcolo utilizzata è di 40 punti (elementi quadrati di 5 m di lato), come suggerito dagli autori stessi. Nella figura 6.47 sono rappresentate le curve di livello dei livelli idrici dopo 7.2 secondi dall'apertura della paratoia ed i corrispondenti vettori delle velocità.

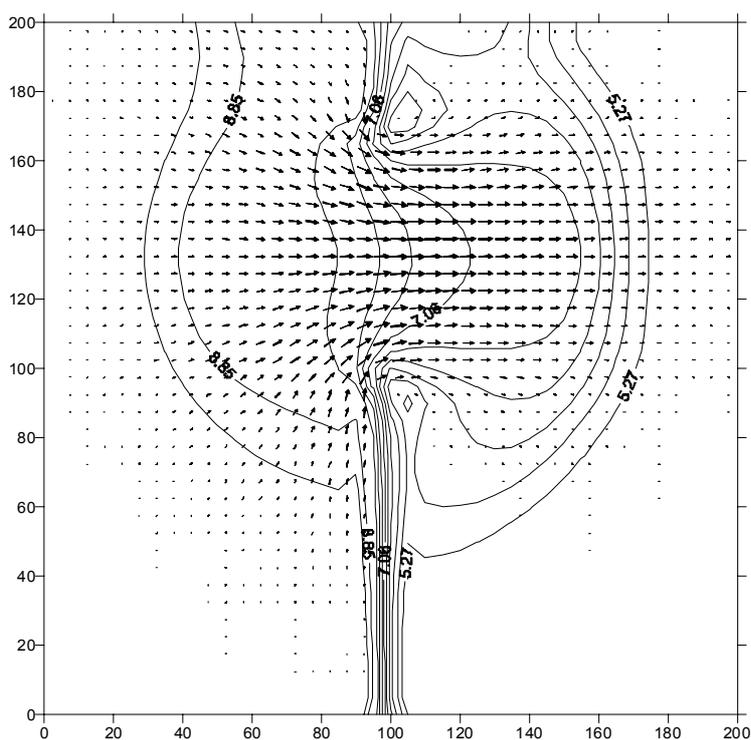


Figura 6.47-F1-Curve di livello e vettori velocità dopo 7.2 secondi di simulazione

Dalla figura 6.47 si nota come dopo 7 secondi la corrente abbia già raggiunto la parete laterale di sinistra, così come accadeva nelle prove sperimentali. L'andamento qualitativo è buono, ed il fronte è posizionato congruentemente rispetto ai dati ottenuti nelle esperienze di laboratorio.

6.2.1.2. Prove Laboratorio Università di Trento (Fraccarollo e Toro 1994.)

Queste prove sono state condotte nel laboratorio di Ingegneria Civile ed Ambientale dell'Università degli Studi di Trento. L'attrezzatura sperimentale è mostrata in figura 6.48 consiste in un piano rettangolare parzialmente occupato, nella direzione longitudinale, da un serbatoio dotato di una paratoia. La parte di canale restante è aperta nei tre lati, quindi il flusso è libero di uscire dal dominio di calcolo e viene poi convogliato in una vasca di raccolta.

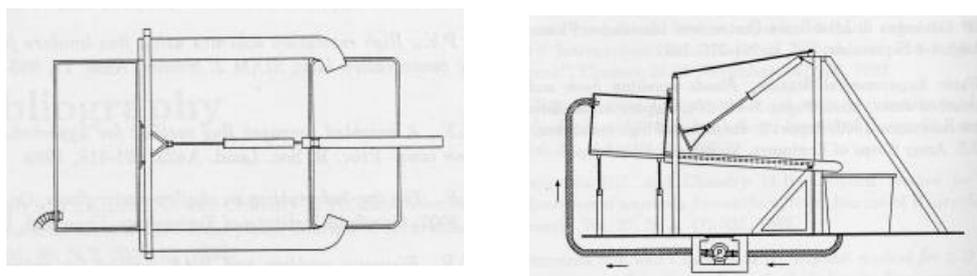


Figura 6.48-Descrizione dell'apparato sperimentale

La lunghezza del canale è 3 m, e la sua larghezza è 2 m. Il serbatoio è lungo 1 m. La paratoia è posta in posizione centrata ed è larga 0.40 m. La pendenza di fondo è posta pari a zero. La quota di pelo liquido all'interno del serbatoio

prima dell'apertura della paratoia è 0.6 m. Il canale è costituito da perspex, quindi il coefficiente di resistenza al moto utilizzato nei calcoli è $0.015 \text{ m s}^{-1/3}$.

Il dominio è stato suddiviso in 15000 elementi quadrati di 2 cm di lato, il valore del numero di Courant durante le elaborazioni è stato posto pari a 0.8.

Si riportano nelle figure seguenti gli andamenti dei livelli d'acqua simulati e misurati in diverse posizioni.

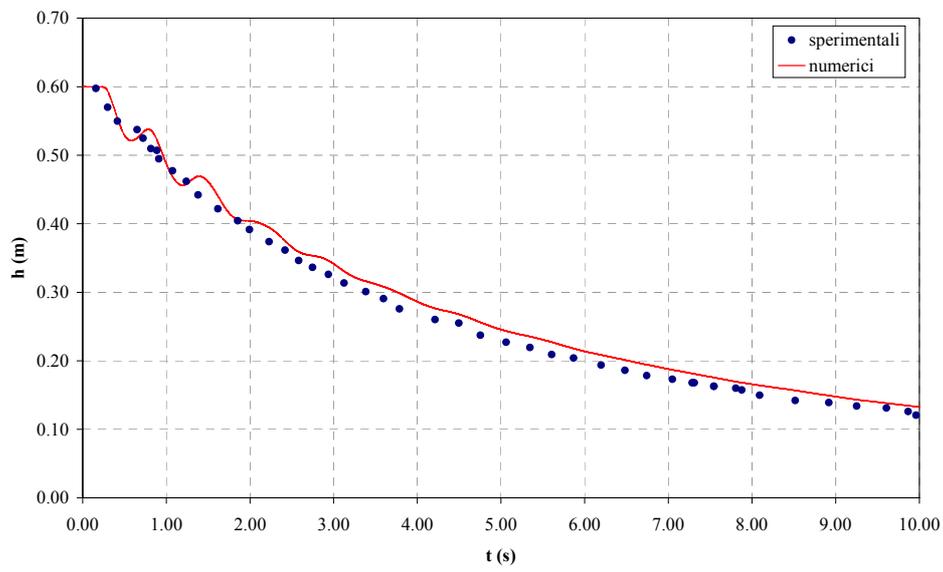


Figura 6.49a Andamento dei livelli misurati e calcolati nel punto-5A

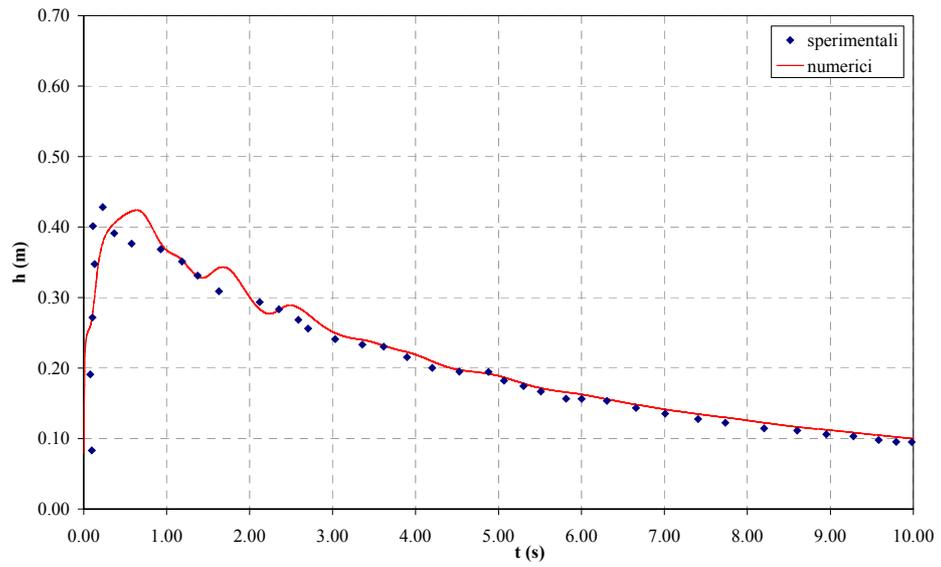


Figura 6.49b Andamento dei livelli misurati e calcolati nel punto 0

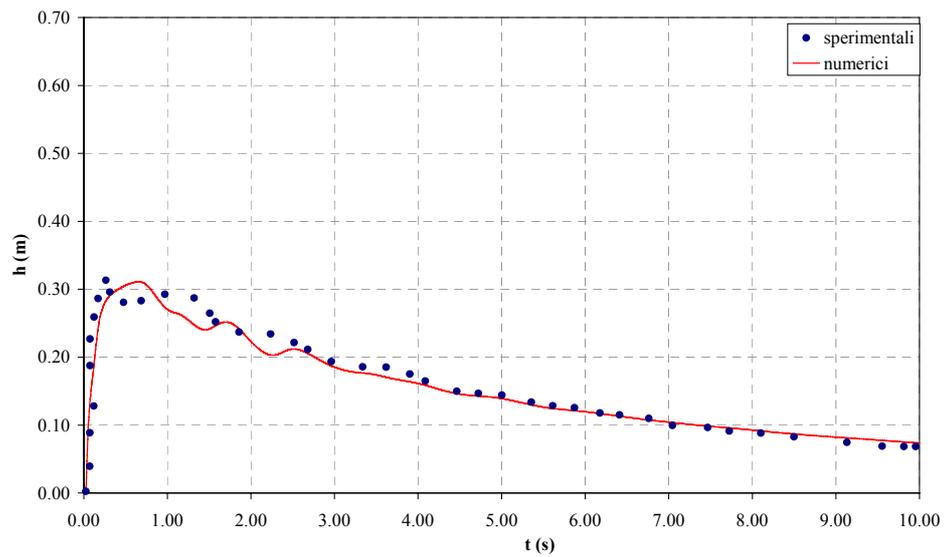


Figura 6.49c Andamento dei livelli misurati e calcolati nel punto 2A

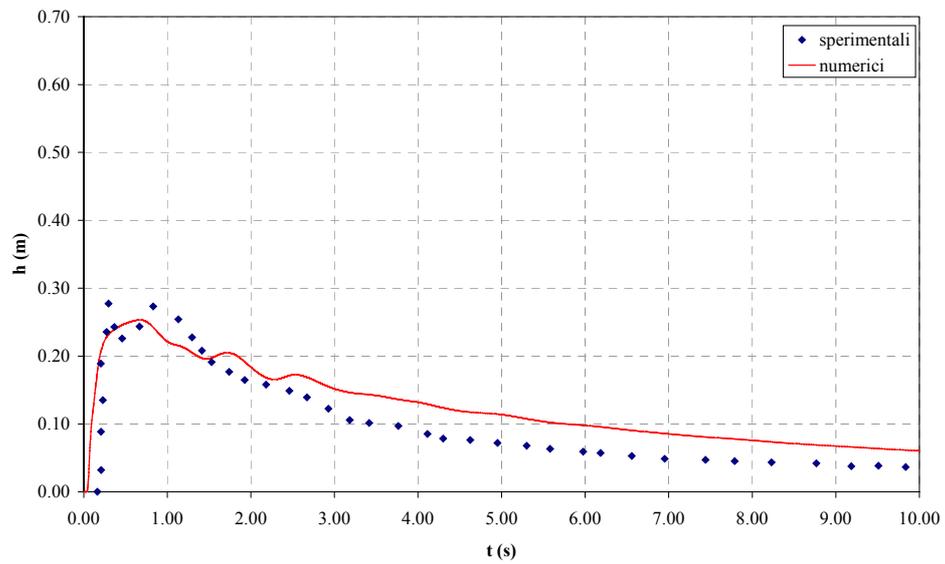


Figura 6.49d Andamento dei livelli misurati e calcolati nel punto 5A

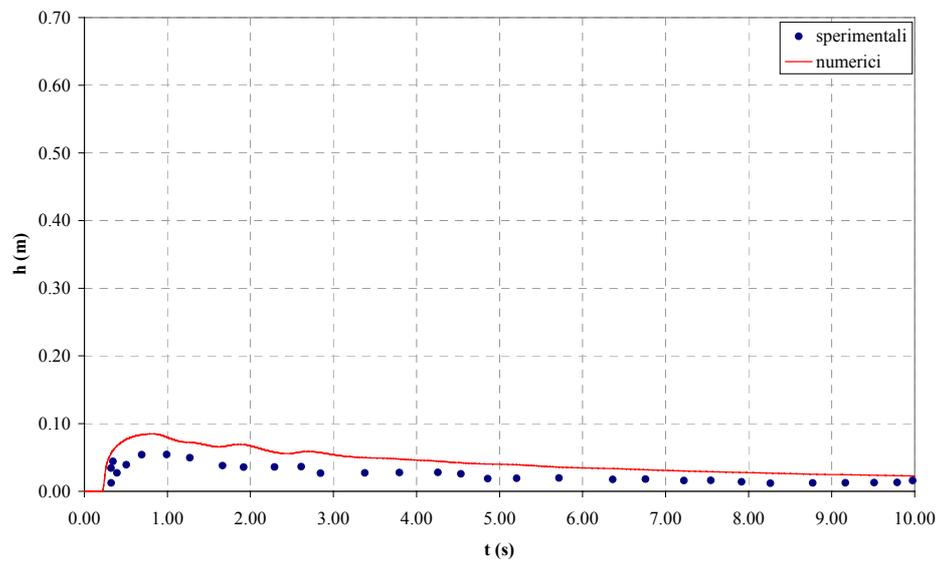


Figura 6.49e- Andamento dei livelli misurati e calcolati nel punto 10A

Il punto $-5A$ è interno al serbatoio, il codice di calcolo riesce a simulare in modo corretto lo svuotamento del serbatoio e le oscillazioni dovute alle riflessioni dell'onda contro le pareti dello stesso. Il punto 0 è in corrispondenza della paratoia, dalla fig 6.49b si osserva un buon accordo tra dati sperimentali e soluzione numerica. Per quanto riguarda i punti a valle della paratoia, indicati con le sigle 2A, 5A e 10A si nota una buona stima della celerità di propagazione del fronte e dei livelli raggiunti nel tempo.

6.2.1.3. Prove Università di Pavia 1 (Sturla 2002)

L'apparato sperimentale è stato messo a punto presso l'Università di Pavia nell'ambito delle tesi di dottorato di Daniele Sturla (Sturla 2002). E' costituito da due vasche separate da una paratoia posta in posizione simmetrica, costituite da plexiglas (vedi Fig 6.50). La lunghezza totale della canaletta è 1.4 m e la larghezza è 0.50 m. Come valore del coefficiente di Manning si è adottato $0.02 \text{ sm}^{-1/3}$.

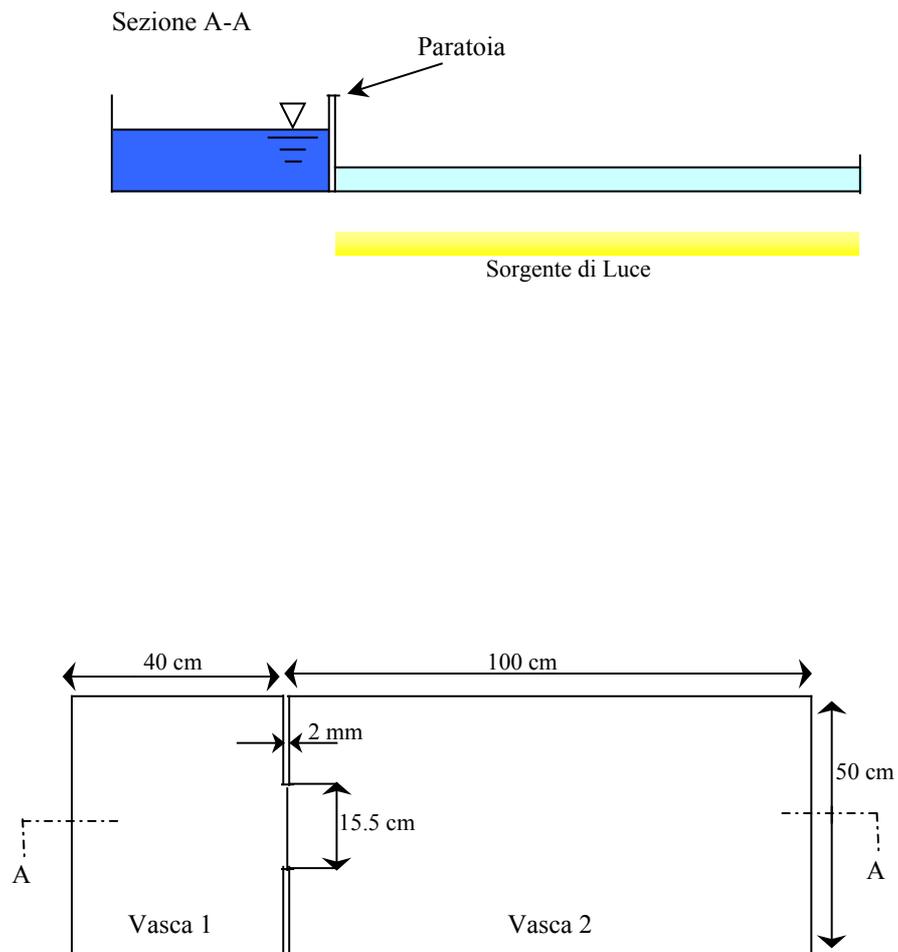


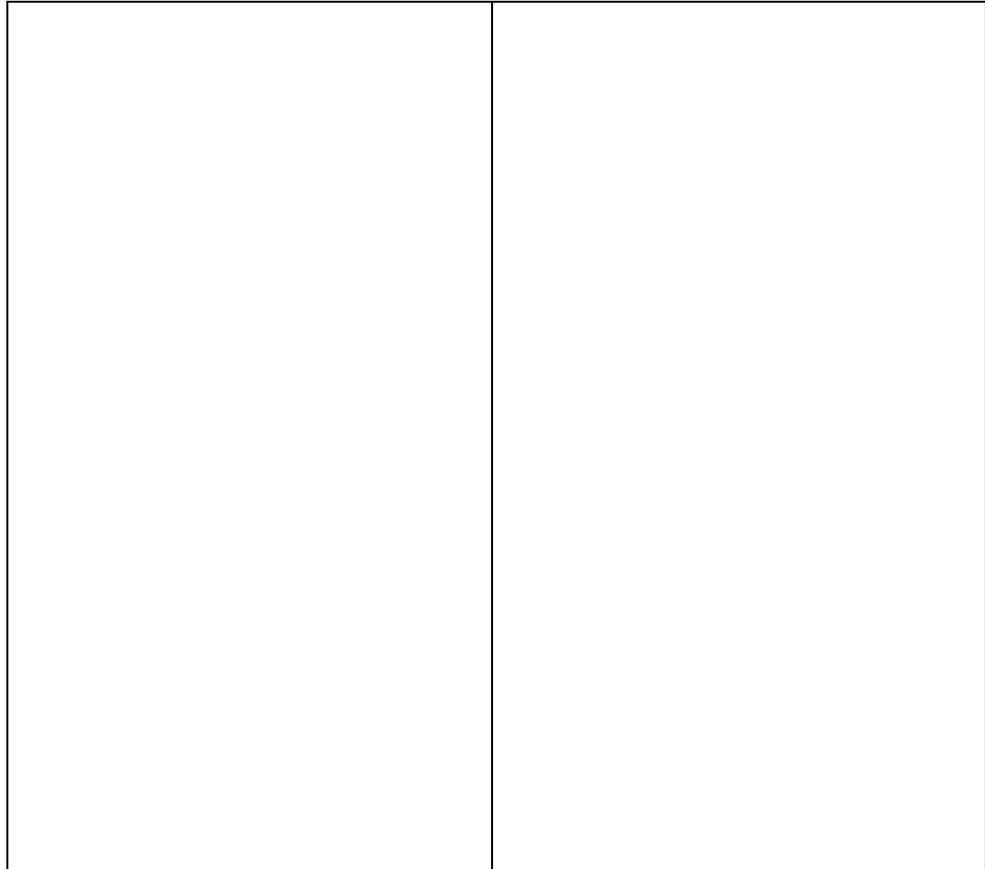
Figura 6.50-Descrizione dell'apparato sperimentale

Si sono simulate tre prove diverse: in questo paragrafo si descrivono le prime due che differiscono sul valore di quota di pelo liquido presente nel serbatoio prima dell'apertura della canaletta. La terza prova, caratterizzata dalla presenza di un ostacolo di forma cubica posto al centro della vasca di valle, verrà trattata nel paragrafo 6.3.3.2.

In tutti i casi il dominio di calcolo è stato suddiviso in 560 elementi quadrati di 5 cm di lato. Il valore del CFL utilizzato nei calcoli è stato 0.8. Il confronto tra simulazioni numeriche ed esperimenti in laboratorio in questo caso è stato fatto a partire dalle immagini delle prove sperimentali a disposizione. Una telecamera che registra 25 fotogrammi al secondo ha ripreso dall'alto le due vasche, si sono confrontati agli stessi istanti di tempo le immagini con le curve di livello dei tiranti idrici e l'andamento dei vettori velocità ottenuti dal solutore numerico.

▪ **Prova n 1**

Tirante idrico all'interno della prima vasca di 0.08 m, seconda vasca asciutta, fondo orizzontale



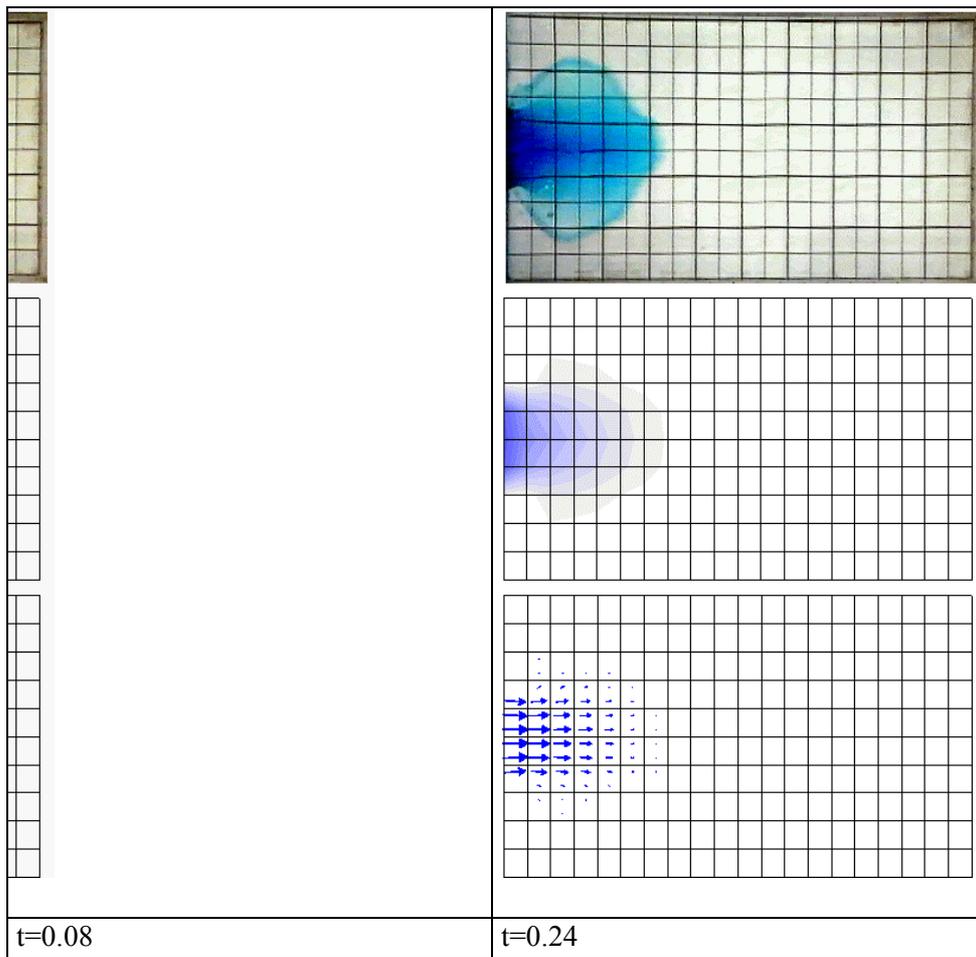
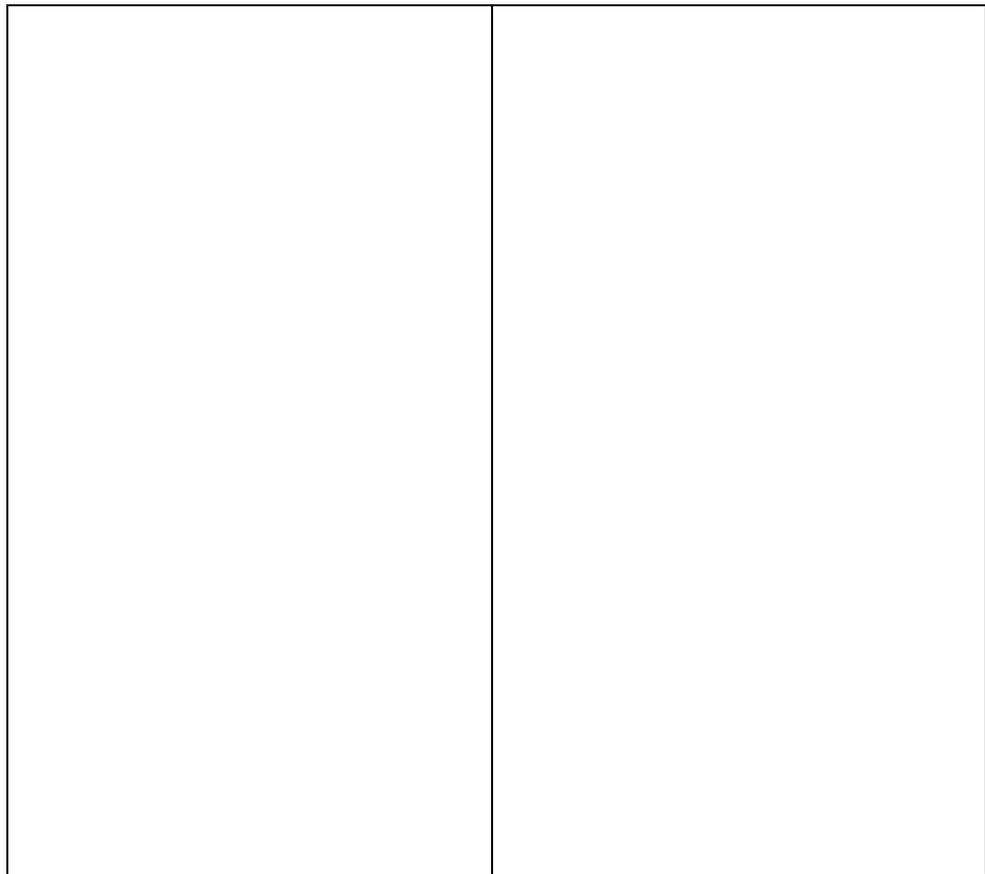


Figura 6.51.a Confronto tra simulazioni e risultati sperimentali



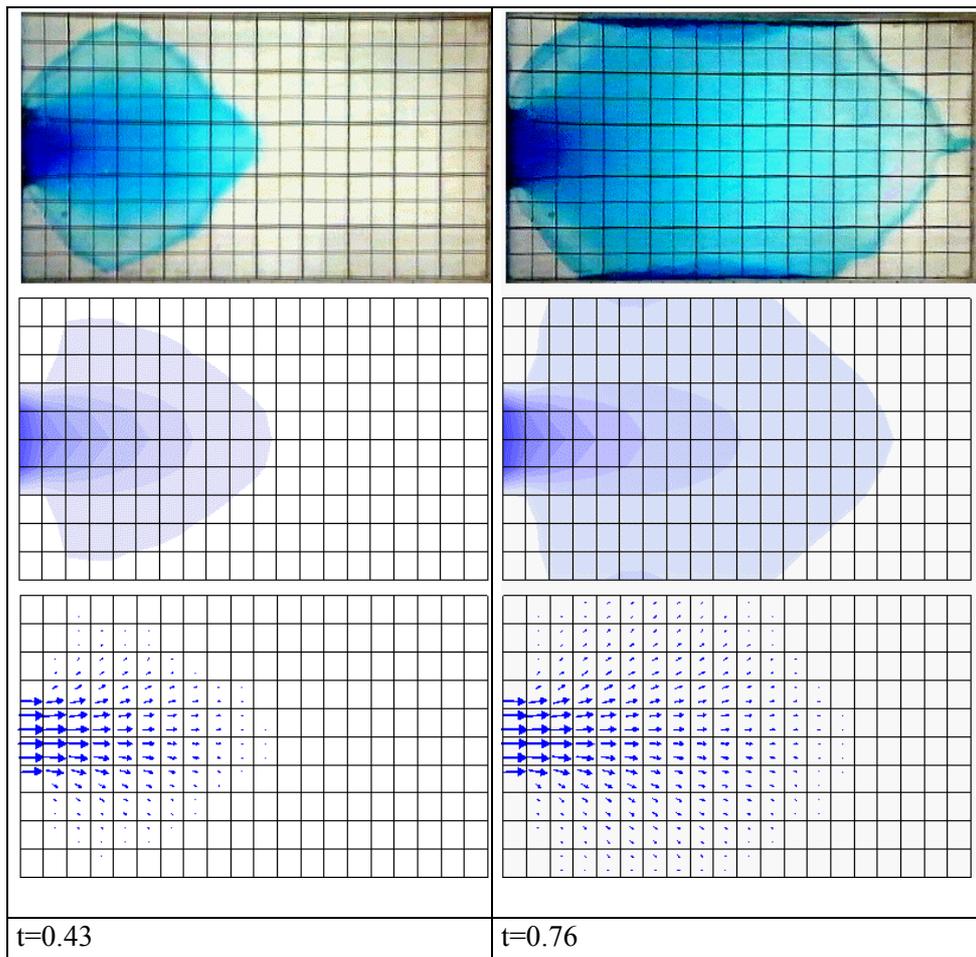
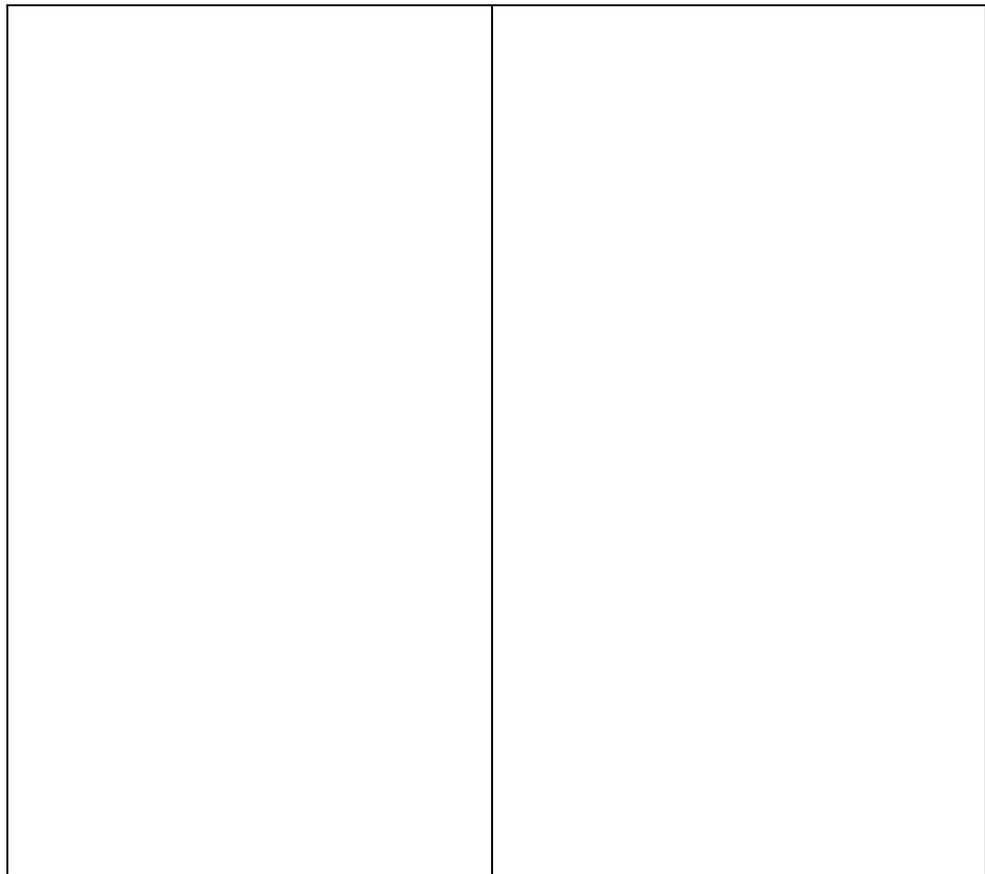


Figura 6.51.b Confronto tra simulazioni e risultati sperimentali



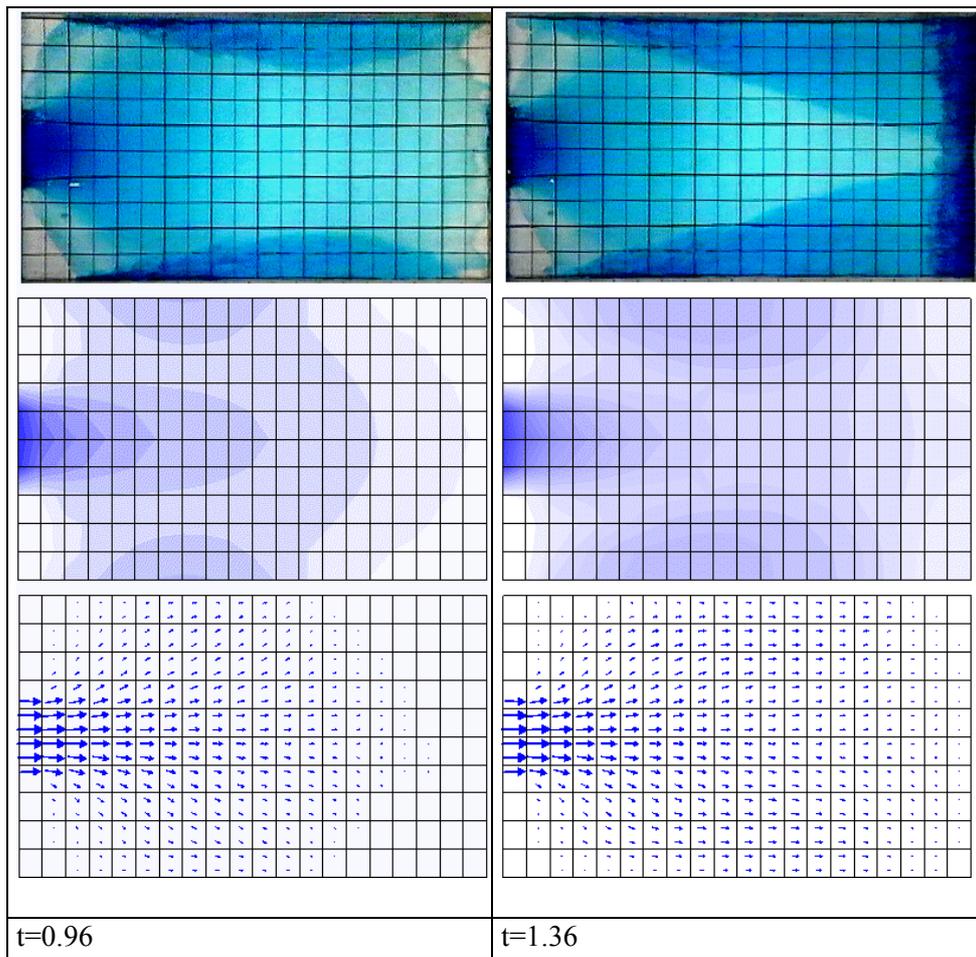
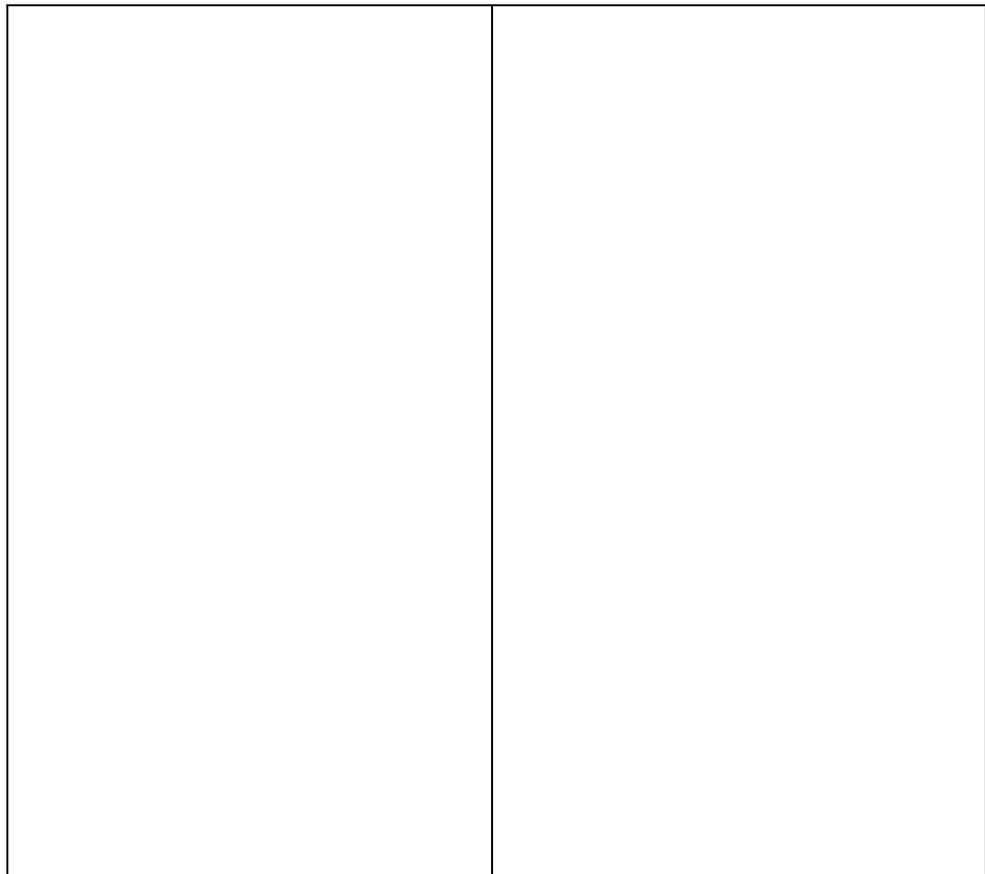


Figura 6.51.c Confronto tra simulazioni e risultati sperimentali



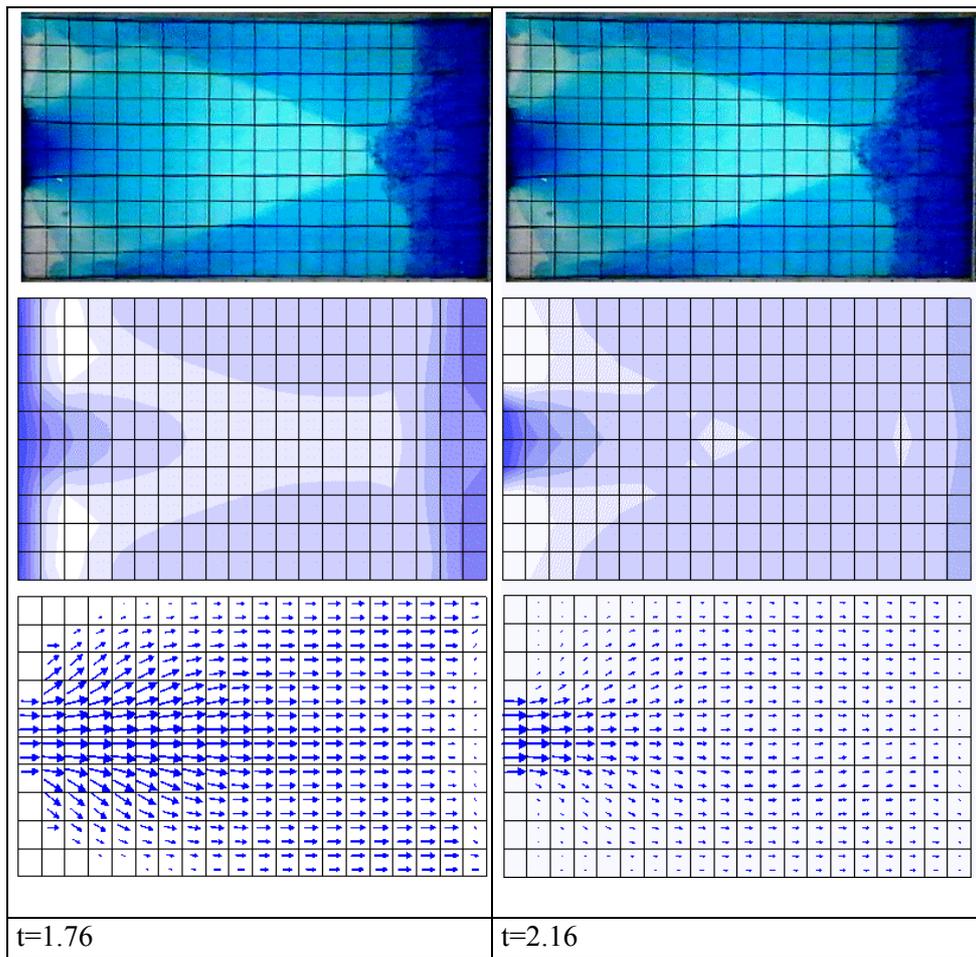
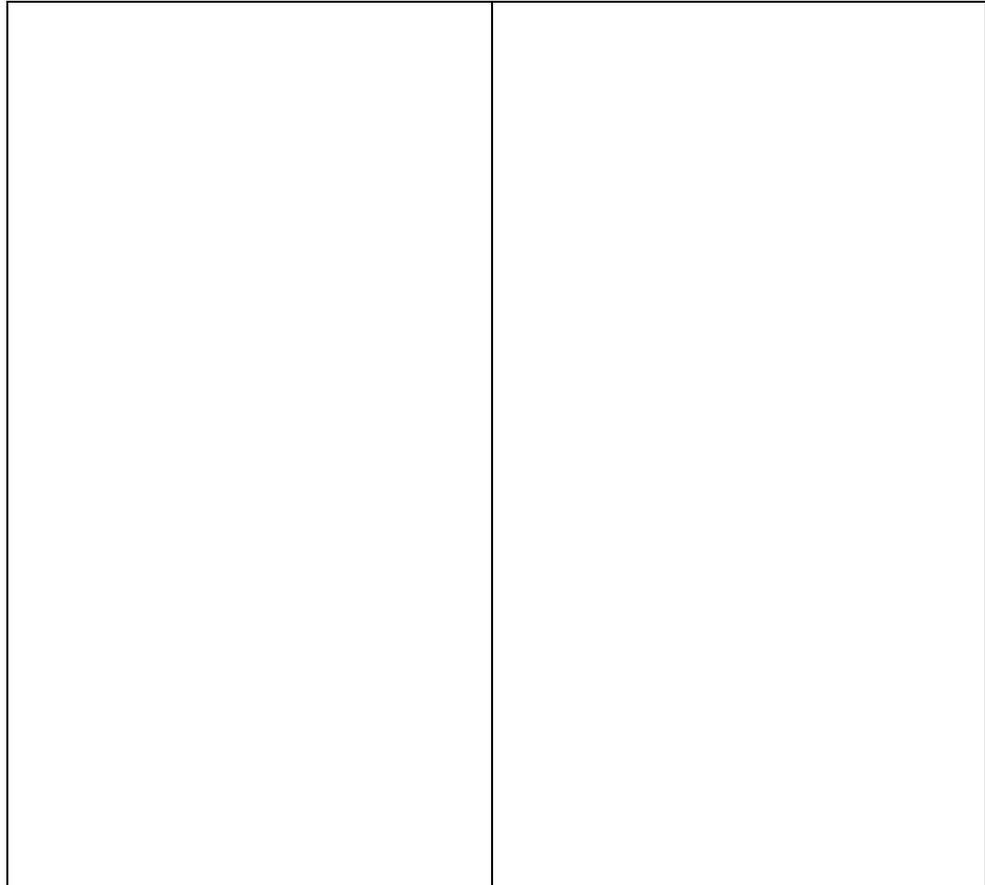


Figura 6.51.d Confronto tra simulazioni e risultati sperimentali

Come si vede dalle figure 6.51 a –d si riesce a riprodurre la simmetria del fenomeno, la riflessione contro le pareti laterali così come quella contro la parete di fondo. Dalle figure 6.51 a-b si nota come l’onda simulata risulti in ritardo rispetto a quella osservata.

▪ **Prova n2**

Il tirante idrico nella prima vasca è di 0.05 m, la seconda vasca è asciutta, il fondo è orizzontale



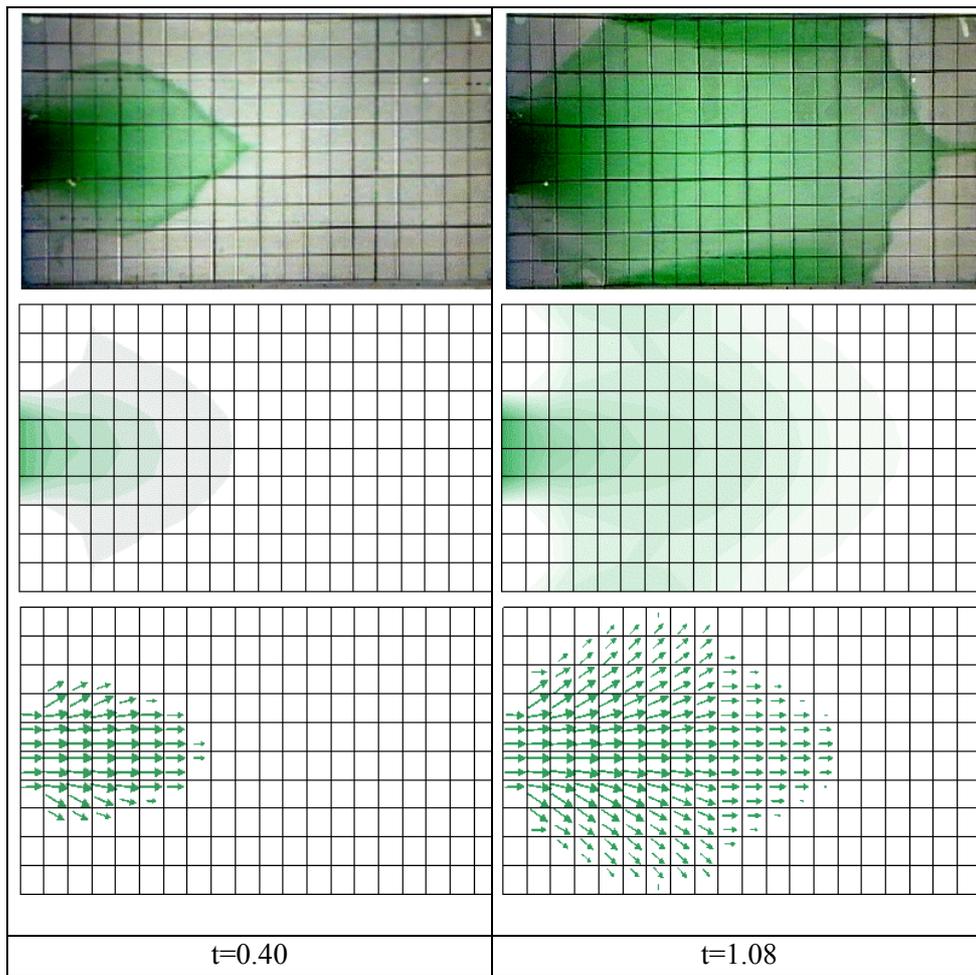
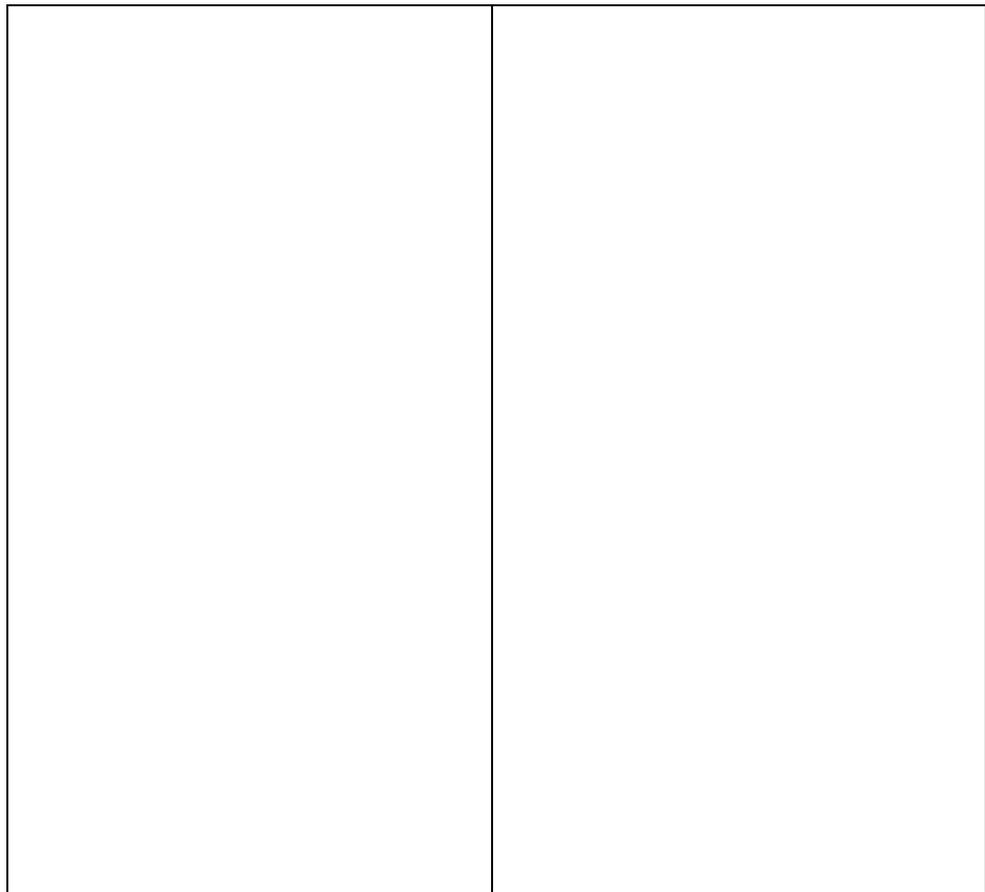


Figura 6.52.a Confronto tra simulazioni e risultati sperimentali



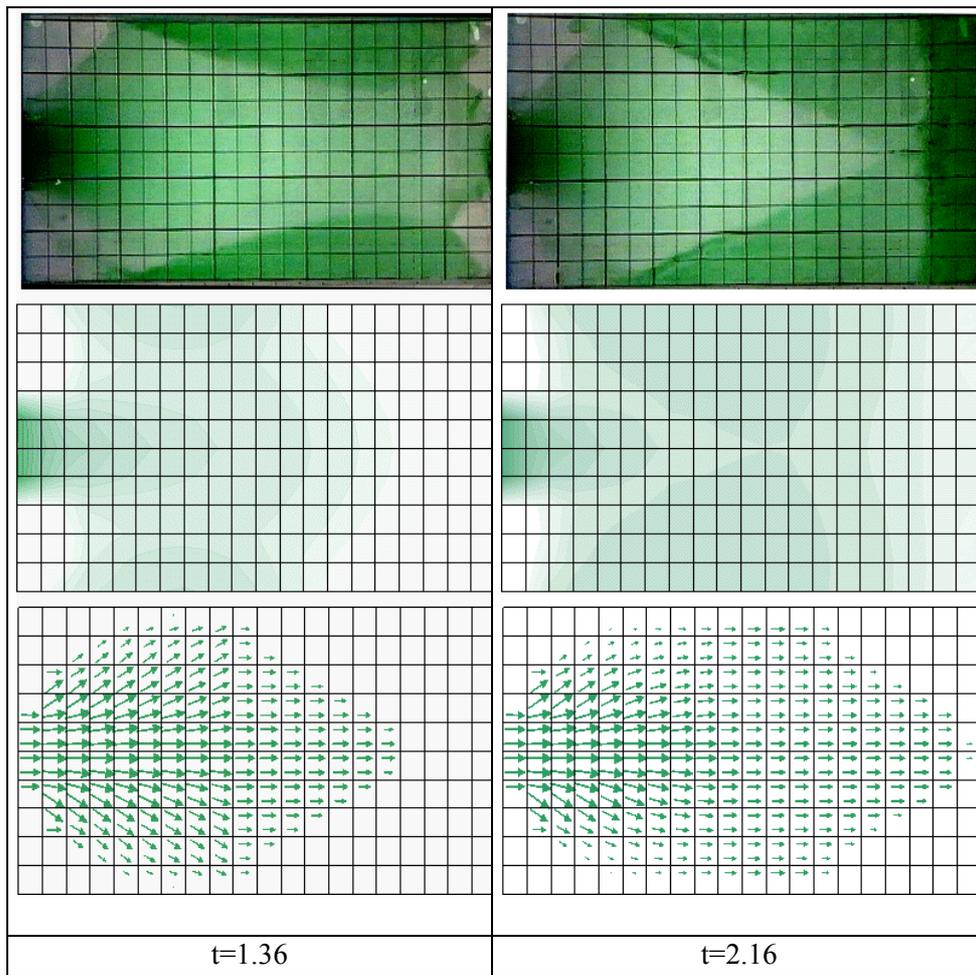


Figura 6.52.b Confronto tra simulazioni e risultati sperimentali

Nei primi istanti (Fig 6.52a) si nota come la velocità di propagazione del fronte simulato risulti minore rispetto a quella osservata, come accadeva nel caso di propagazione su fondo asciutto.

6.2.1.4. Prove Laboratorio CITEEC-1 (Brufau 2002)

Il modello fisico è stato costruito nel Laboratorio di Idraulica del CITEEC (Spagna). L'apparato sperimentale consiste in un serbatoio chiuso separato in due parti da un setto che presenta un'apertura non simmetrica. (Vedi figura 6.53)

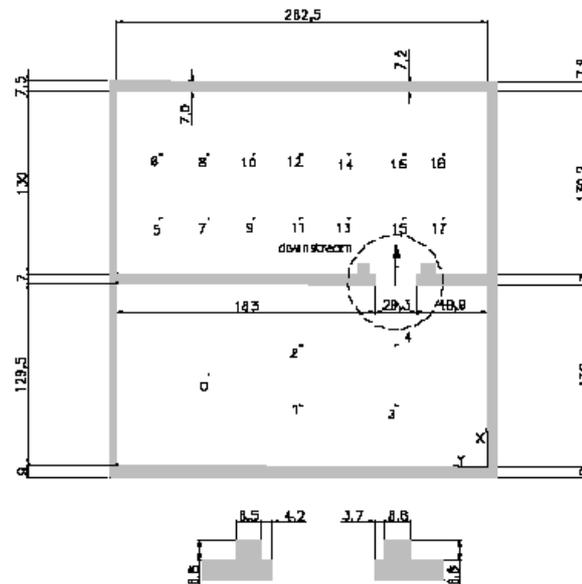


Figura 6.53-Descrizione dell'apparato sperimentale

Il materiale che costituisce l'apparato è calcestruzzo, le pareti che costituiscono la vasca sono impermeabili. L'acqua all'interno del serbatoio è al livello di 0.5 m e a valle c'è un tirante di 0.1 m. Si è utilizzata una maglia quadrata di 2774 elementi di 10 cm di lato. Il valore del CFL utilizzato nei calcoli è 0.7.

Si riportano i confronti tra idrogrammi dei livelli calcolati e misurati in nove delle diciassette stazioni di misura che si vedono in figura 6.53. A tale proposito

si ringrazia il laboratorio CITEEC nella persona del Prof J.Puertas per aver fornito i dati su supporto magnetico.

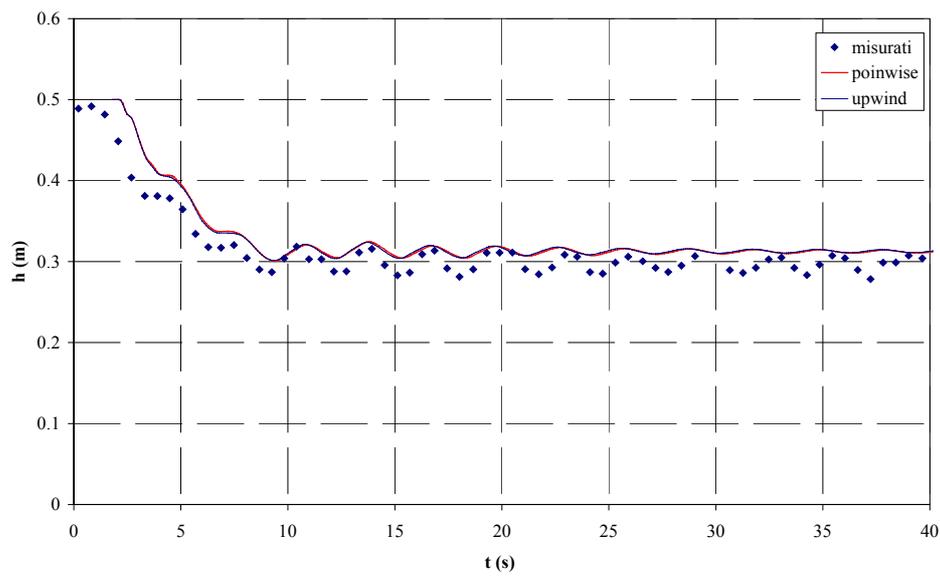


Figura 6.54a-Idrogramma dei livelli nel punto P0

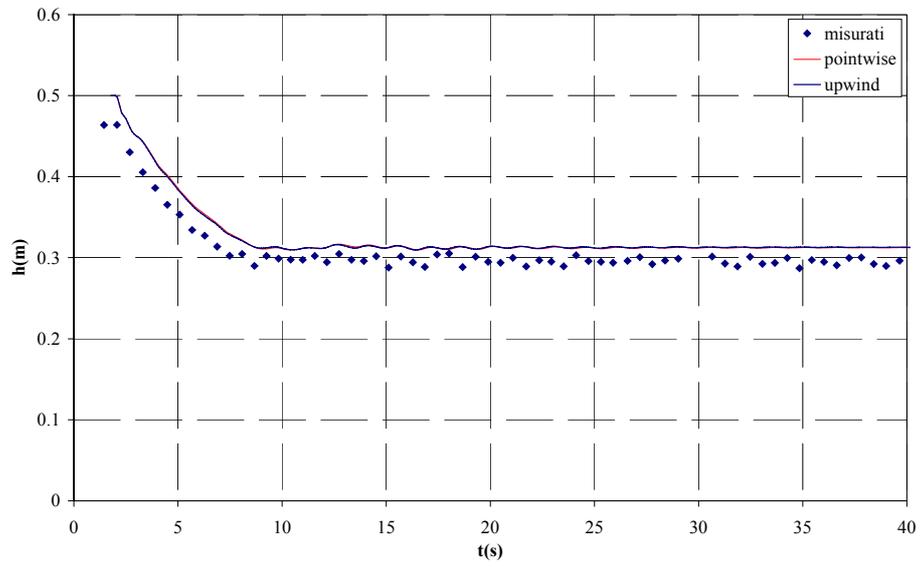


Figura 6.54b-Idrogramma dei livelli nel punto P1

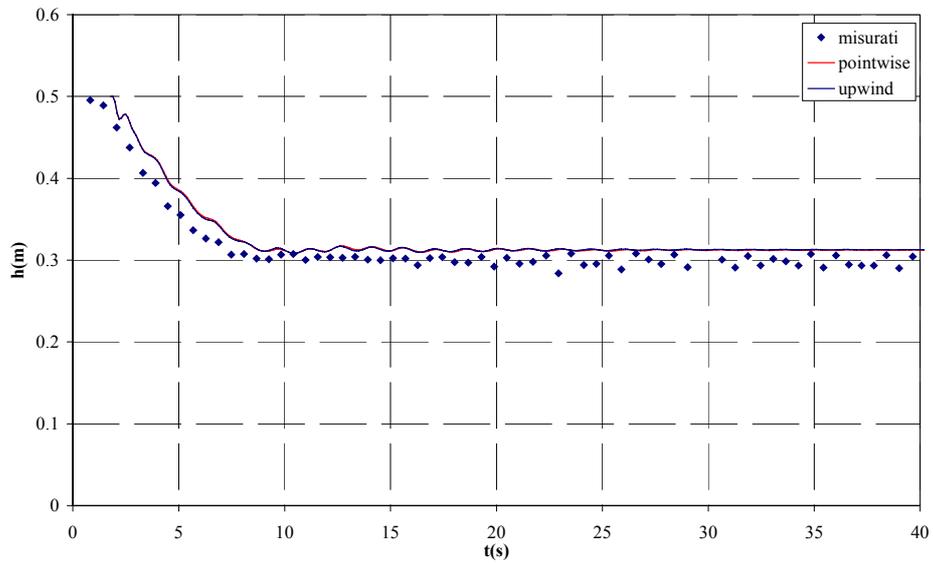


Figura 6.54c-Idrogramma dei livelli nel punto P2

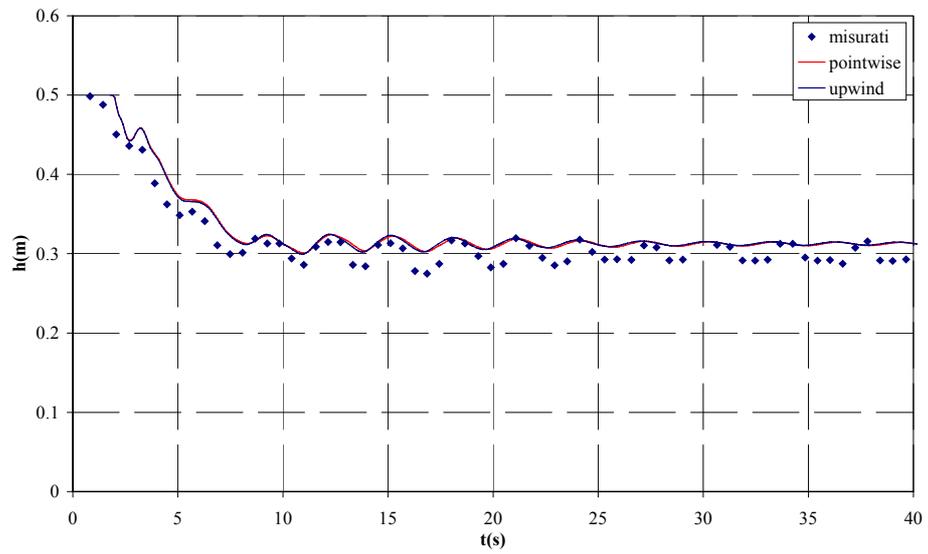


Figura 6.54d-Idrogramma dei livelli nel punto P3

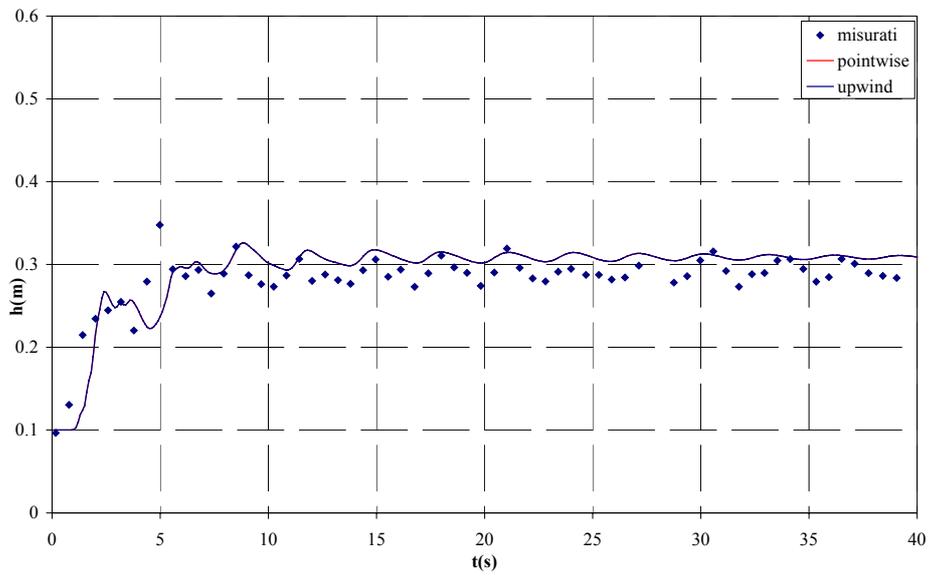


Figura 6.54e-Idrogramma dei livelli nel punto P5

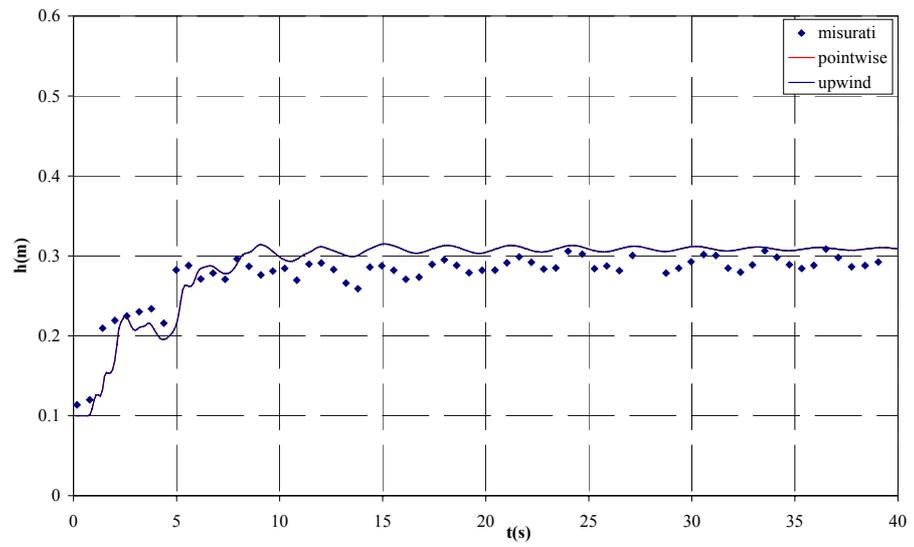


Figura 6.54f-Idrogramma dei livelli nel punto P7

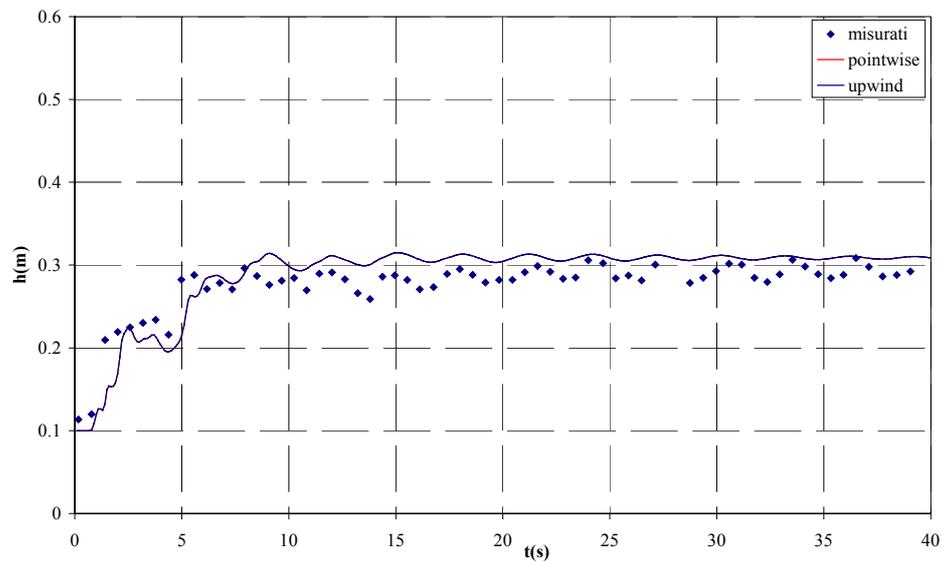


Figura 6.54g-Idrogramma dei livelli nel punto P8

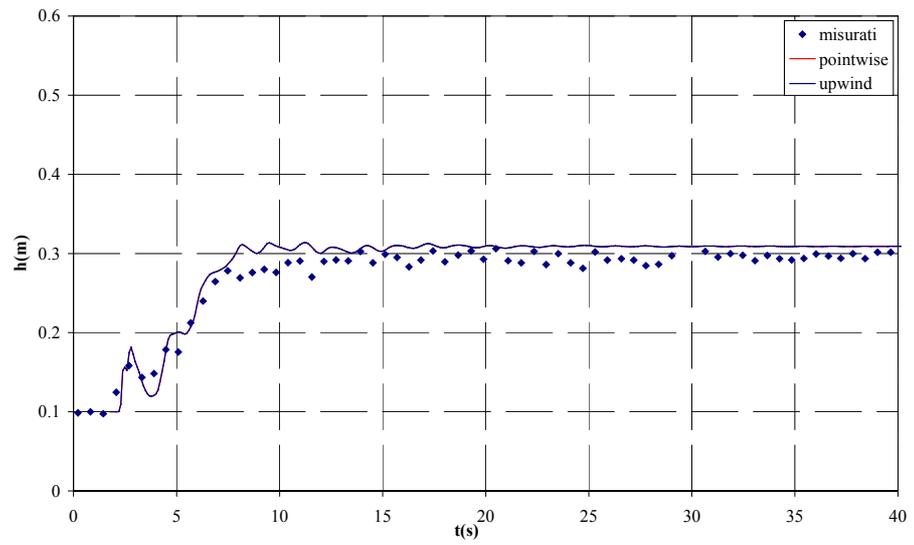


Figura 6.54h-Idrogramma dei livelli nel punto P12

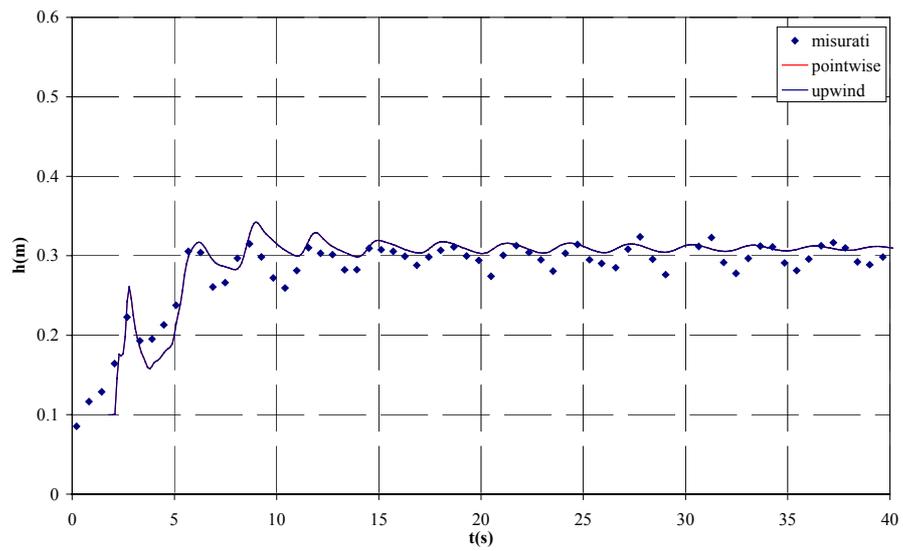


Figura 6.54i-Idrogramma dei livelli nel punto P18

Si nota un buon accordo tra i dati sperimentali e i risultati delle simulazioni. Si sono adottate entrambe le schematizzazioni del termine sorgente anche se non esistono sostanziali differenze in questo caso, dove la pendenza di fondo è trascurabile. Si riesce a simulare con buona precisione sia lo svuotamento all'interno del serbatoio che il progressivo riempimento della vasca, con le oscillazioni dovute alla piccola differenza tra i tiranti a monte e a valle.

Nella figura 6.55 si riportano gli andamenti dei vettori velocità agli istanti 1, 2, 8 e 10 s dopo l'apertura della paratoia relativi alla schematizzazione del termine sorgente upwind. Ad 1 s la corrente non è ancora arrivata alla parete di fondo, e quindi il fenomeno risulta ancora simmetrico. Al secondo istante di tempo si può vedere la separazione della corrente a destra e sinistra a causa dell'impatto con la parete di fondo e la conseguente riflessione, che genera due correnti di ricircolo, quello di destra confinato dalla parete laterale e quello a sinistra non ha ancora raggiunto la parete laterale, essendo la posizione della paratoia non simmetrica. Ad 8 secondi il vortice di sinistra ha raggiunto la parete laterale mentre quello di destra sembra essere di entità inferiore. A 10 secondi il fenomeno non è ancora in stato stazionario, come si può vedere negli idrogrammi corrispondenti alle stazioni P5, P7, P8 che si riferiscono a punti posizionati nella parte a sinistra della vasca, che presentano ancora oscillazioni.

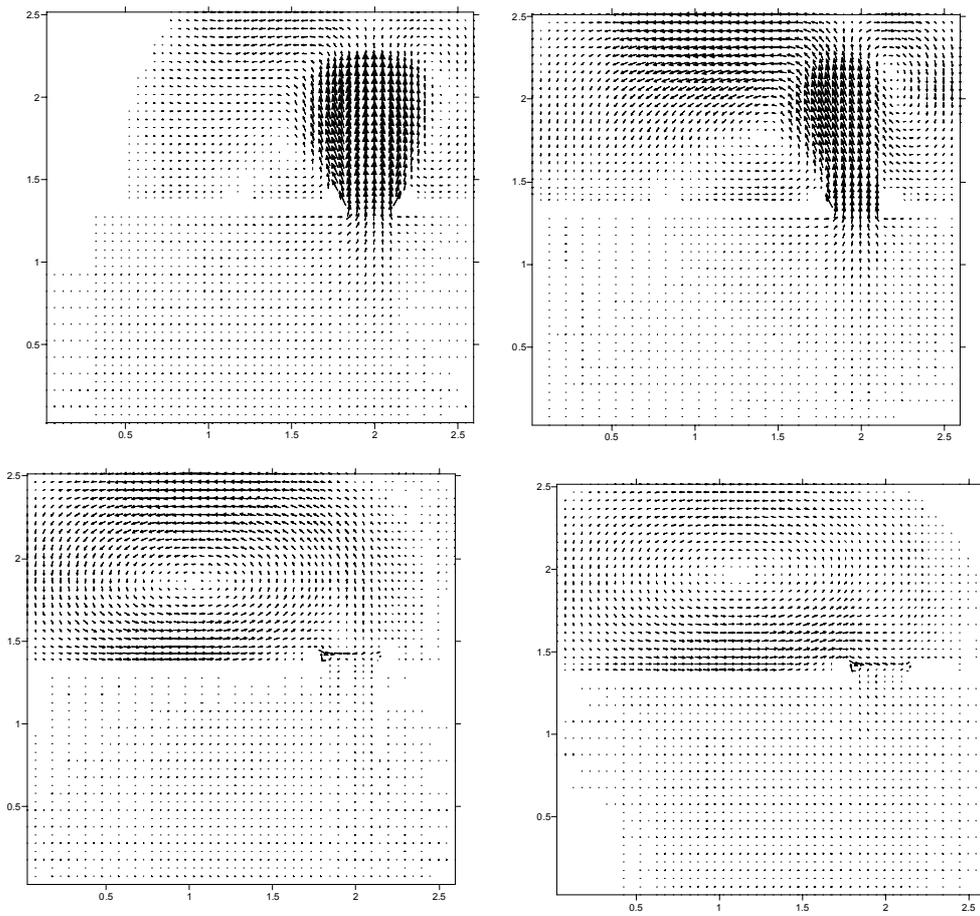


Figura 6.55-Vettori velocità agli istanti 1, 2, 8 e 10 s

6.2.2. Prove su canali a geometria complessa

Una volta verificato il codice su prove in canaletta caratterizzate da geometria semplice si è passati ad analizzare prove in presenza di contropendenza, variazioni della sezione trasversale (allargamenti o restringimenti) o brusche variazioni di direzione del canale (presenza di gomiti) per mettere alla prova il trattamento del termine sorgente. In alcuni casi, trattandosi di prove già simulate con il codice monodimensionale, si sono riportati i confronti tra i due codici.

6.2.2.1. Prove Università di Parma 2 (Aureli et al 2000)

Si è scelto di simulare una prova sperimentale già illustrata nel caso mono dimensionale (paragrafo 6.1.4.3) che presenta un brusco cambiamento di pendenza. Il dominio di calcolo è stato discretizzato in quadrati di 5 cm di lato. Il CFL utilizzato nelle elaborazioni è 0.7.

Si riportano i risultati ottenuti con i due trattamenti del termine sorgente già illustrati nel capitolo 4.

Trattandosi di una prova spiccatamente monodimensionale, si nota un buon accordo tra simulazioni ed osservazioni; il trattamento del termine sorgente ha effetti ininfluenti ai fini del calcolo. Si riesce a riprodurre con buona approssimazione le riflessioni dovute alla contropendenza, i relativi bagnamenti e asciugamenti del canale, come succedeva nella simulazione monodimensionale.

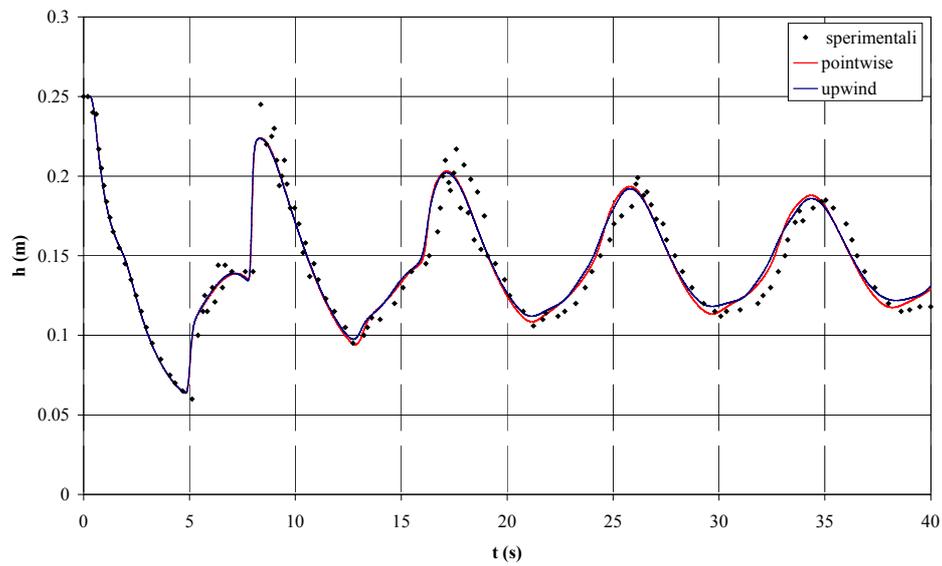


Figura 6.56a -Andamento del tirante nella sezione x=1.4

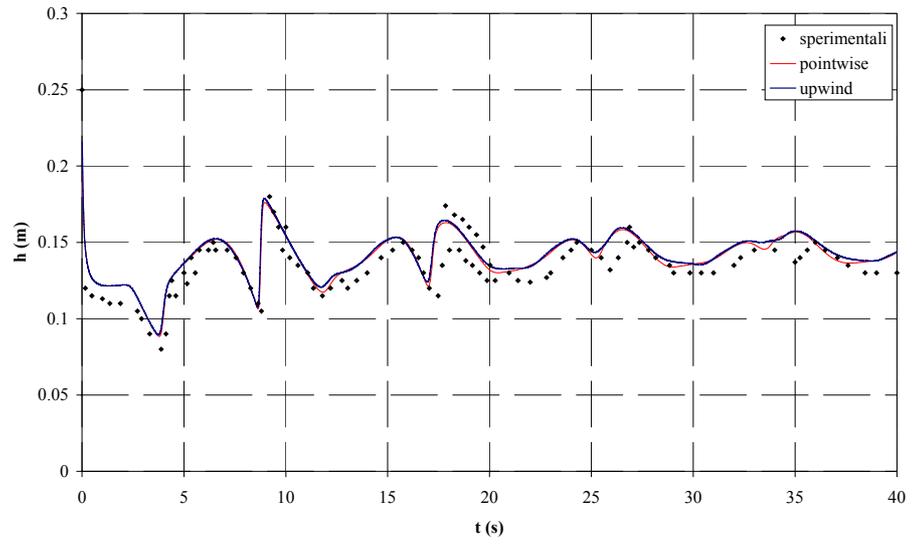


Figura 6.56b-Andamento del tirante nella sezione x=2.28

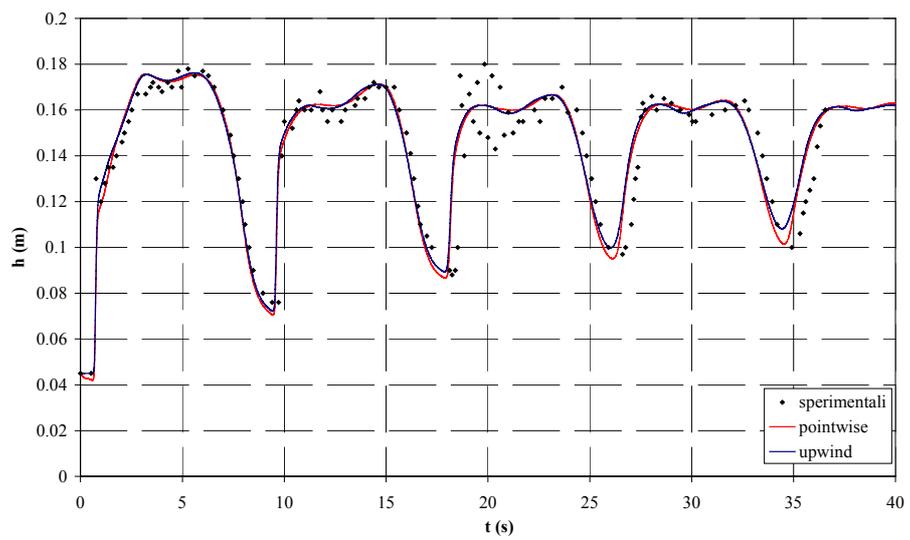


Figura 6.56c -Andamento del tirante nella sezione x=3.36

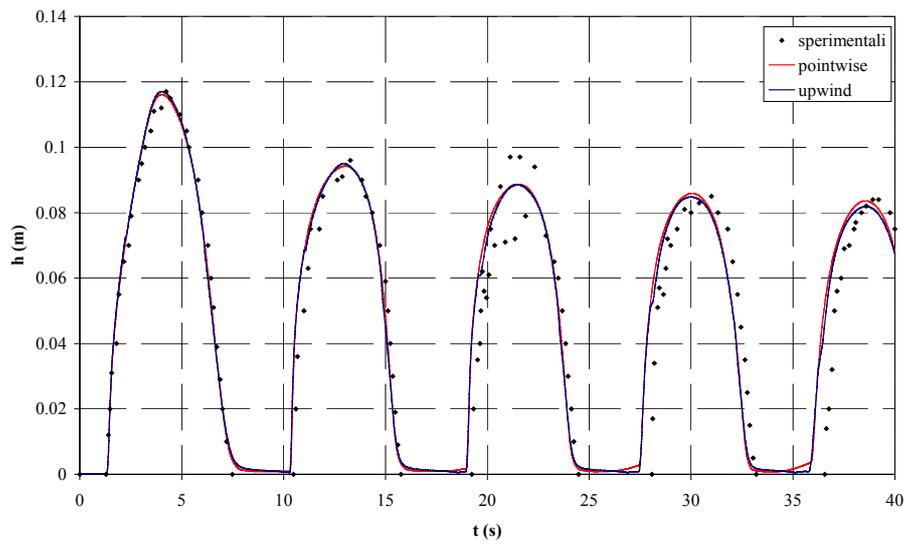


Figura 6.56e -Andamento del tirante nella sezione $x=4.28$

6.2.2.2. Prove Università di Parma 1 (Aureli et al 2002)

L'apparato sperimentale è costituito da una canaletta lunga 10 m e larga 0.30 m (vedi figura 6.57) nella quale scorre una portata costante e dove viene istantaneamente aperta una paratoia laterale di larghezza 0.28 m. Questo causa l'allagamento di una superficie piana inizialmente asciutta collegata al canale attraverso la breccia. La superficie laterale termina con degli stramazzi triangolari in modo tale da permettere la misura della portata una volta che lo stato stazionario è stato raggiunto.

L'intero dispositivo è stato posizionato con una pendenza S_{0x} di 0.1 % e S_{0y} di 0.0%.

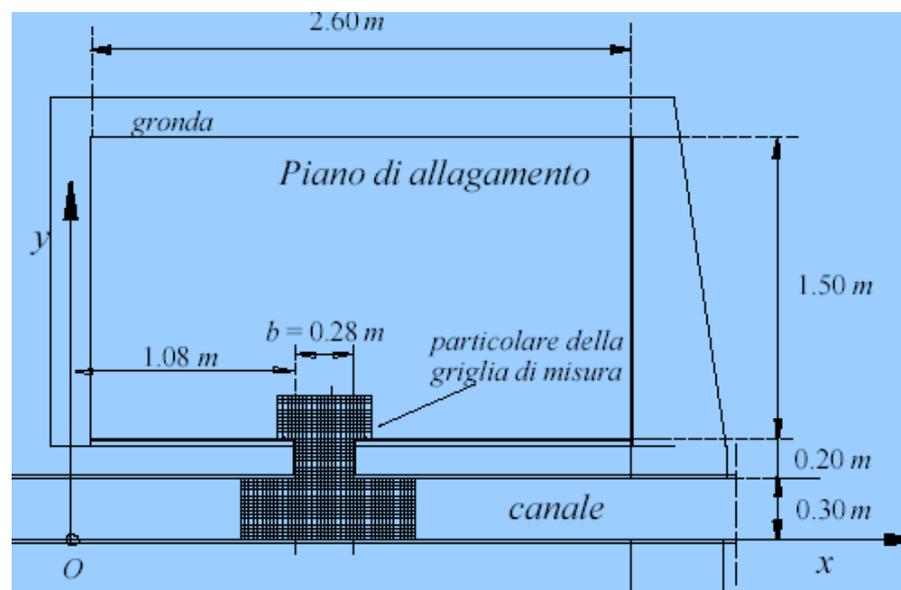


Figura 6.57- Descrizione apparato sperimentale

Come valore del coefficiente di resistenza nelle simulazioni si è preso il valore ricavato dagli autori, $0.01 \text{ sm}^{-1/3}$.

Il dominio di calcolo è stato suddiviso in elementi quadrati di 2 cm di lato, Il CFL adottato nelle simulazioni è stato 0.7.

Come primo controllo si è simulato il raggiungimento della condizione stazionaria, imponendo come condizioni al contorno di valle il numero di Froude di moto uniforme per la canaletta considerata ($fr=0.47$). Una volta stabilita la condizione stazionaria si è simulata l'apertura istantanea della apertura laterale e il conseguente allagamento del piano. Si riportano i risultati ottenuti immettendo la portata costante di 10 l/s. Nelle figure seguenti si riportano gli idrogrammi dei livelli in sei posizioni e i particolari dei vettori velocità in corrispondenza della breccia per vari istanti di tempo

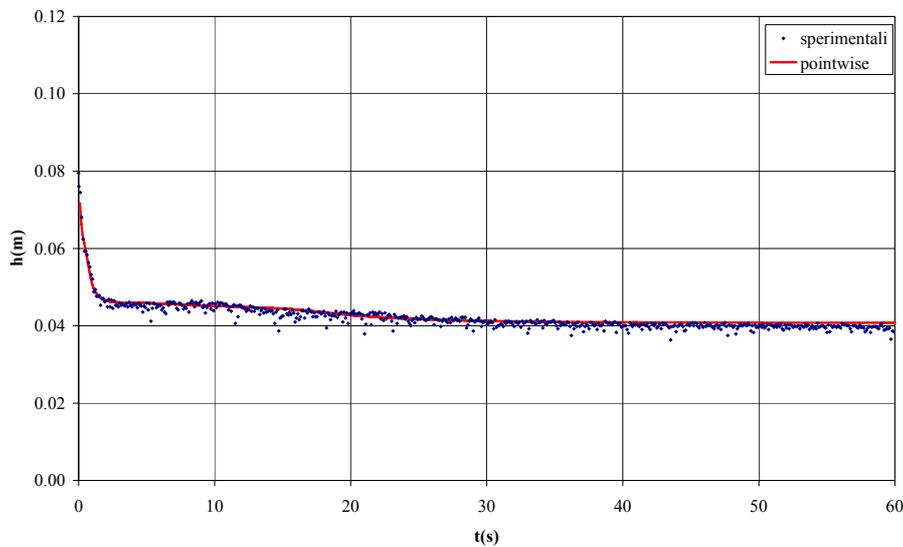


Figura 6.58a-Andamento Idrogrammi misurati e calcolati punto P1

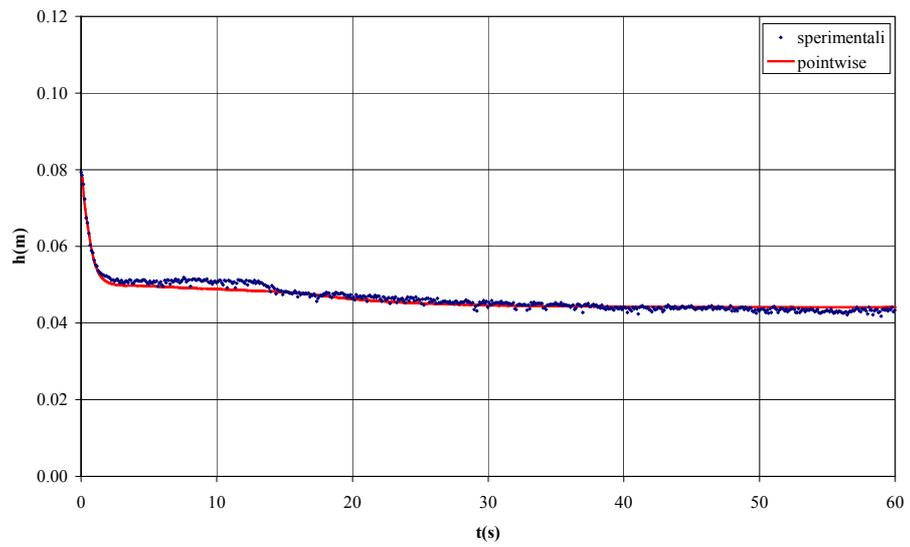


Figura 6.58b-Andamento Idrogrammi misurati e calcolati punto P2

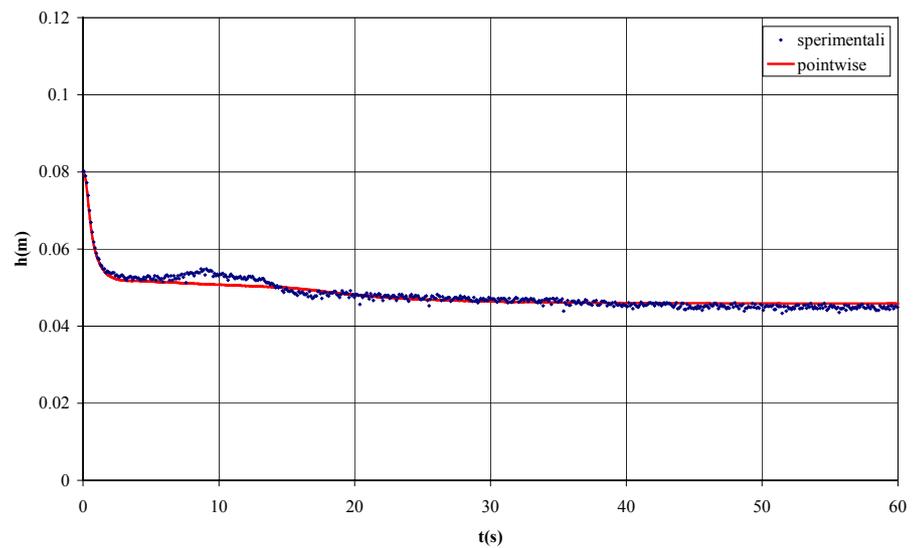


Figura 6.58c-Andamento Idrogrammi misurati e calcolati punto P3

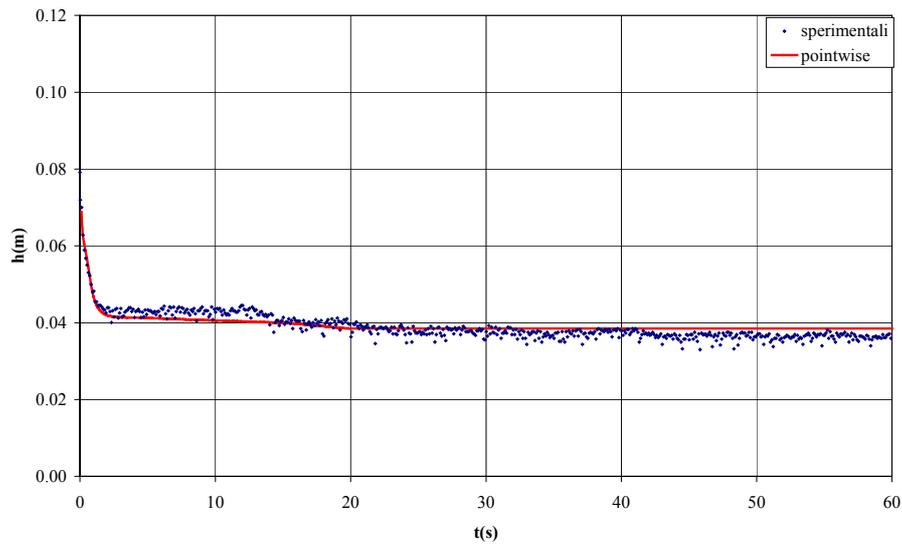


Figura 6.58d-Andamento Idrogrammi misurati e calcolati punto P4

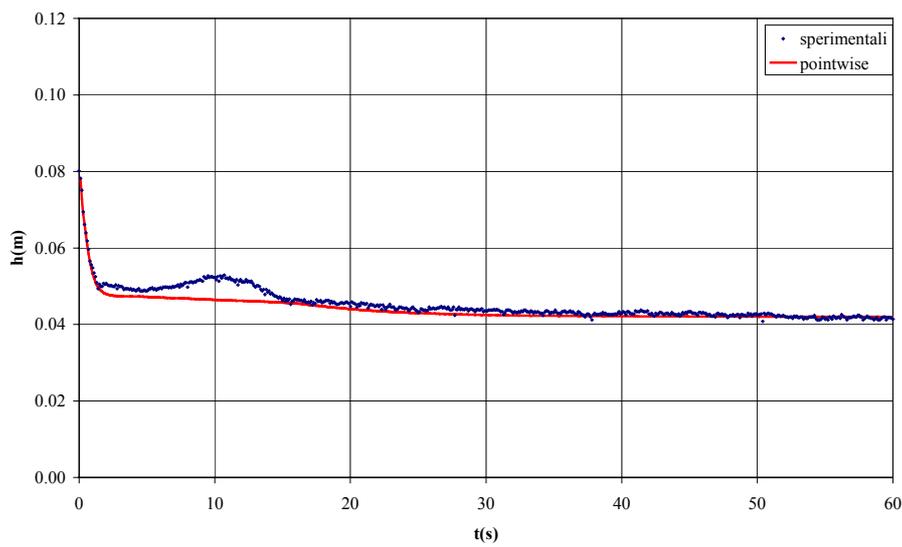


Figura 6.58e-Andamento Idrogrammi misurati e calcolati punto P5

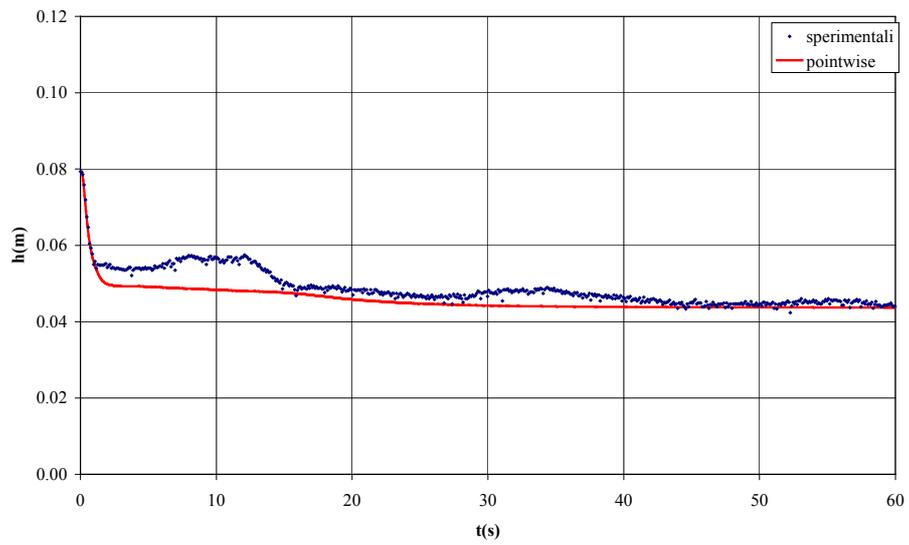


Figura 6.58f-Andamento Idrogrammi misurati e calcolati punto P6

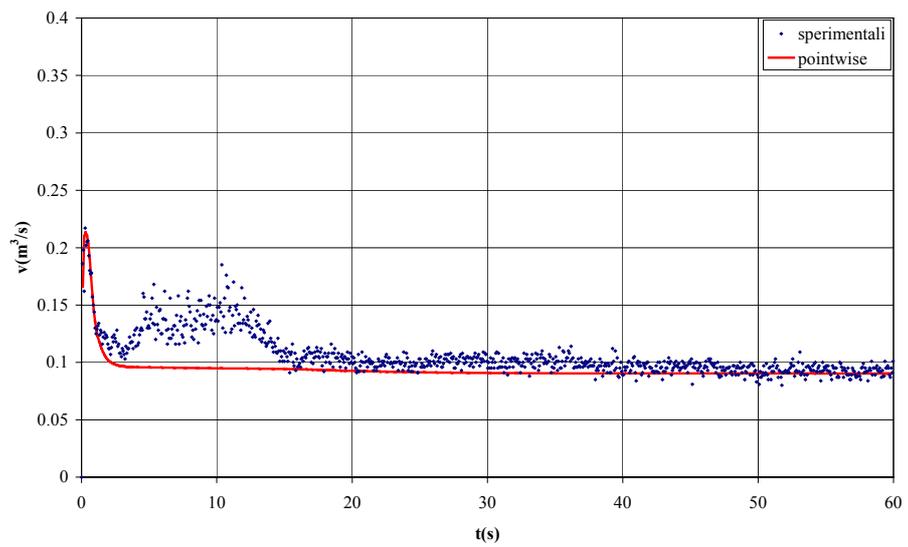


Figura 6.58g-Andamento velocità misurati e calcolati punto P3

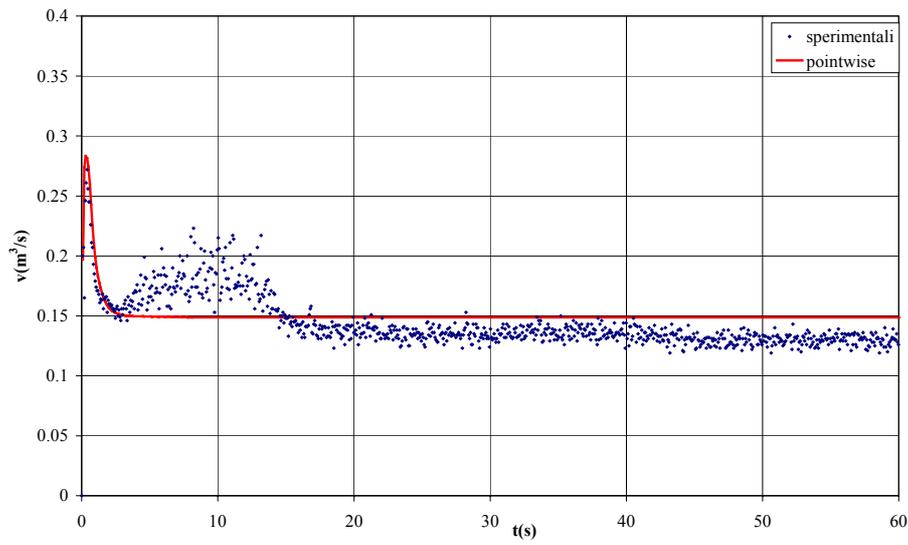


Figura 6.58h-Andamento velocità misurati e calcolati punto P5

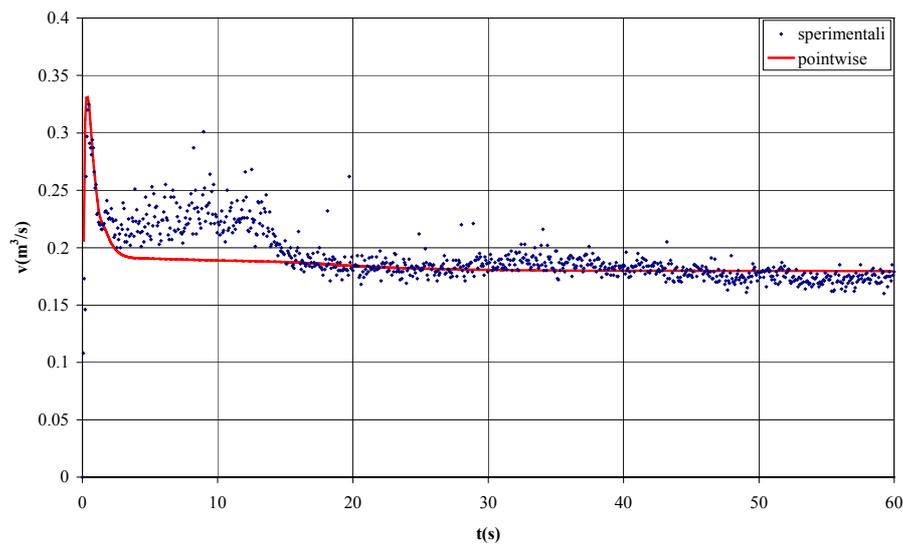


Figura 6.58i-Andamento velocità misurati e calcolati punto P7

Le stazioni di misura P1, P2 e P3 si trovano alla stessa ascissa $x=1.14$ e alle ordinate 0.08, 0.016 e 0.24 m. Si trovano in corrispondenza dell'apertura laterale. Si nota un buon accordo sia nella simulazione dello svuotamento del canale principale che della situazione stazionaria. Le stazioni P4, P5 e P6 si riferiscono alla ascissa 1.18, si nota un buon accordo con il raggiungimento dello stato stazionario, anche se la simulazione non riesce a riprodurre la riflessione che si determina nella realtà. Lo stesso comportamento era stato notato da Aureli e Mignosa, applicando uno schema numerico del secondo ordine (Mc Cormack con termine di viscosità artificiale). Una possibile spiegazione fornita dagli autori stessi è data dalla forte curvatura della superficie libera che ha reso difficile l'acquisizione dei dati sperimentali.

Nelle figure 6.58g, h, i sono mostrati gli andamenti delle componenti verticali delle velocità nelle stazioni P3, P5, P7, caratterizzate dalla stessa ordinata ($y=0.24\text{m}$). Anche in questo caso si nota il raggiungimento delle condizioni di stato stazionario, anche se non si riesce a riprodurre la seconda riflessione della corrente.

6.2.2.3. Prove LNEC (Hiver 2000)

L'apparato sperimentale è stato già descritto nel paragrafo 6.1.4.7 essendo stato simulato anche con il codice monodimensionale. Il dominio di calcolo è stato diviso in celle quadrate di 5 cm di lato. Il CFL adottato nei calcoli è stato 0.7.

Si riporta il confronto tra simulazioni mono e bidimensionali ottenute con la schematizzazione upwind del termine sorgente, trattandosi di una prova a fondo orizzontale.

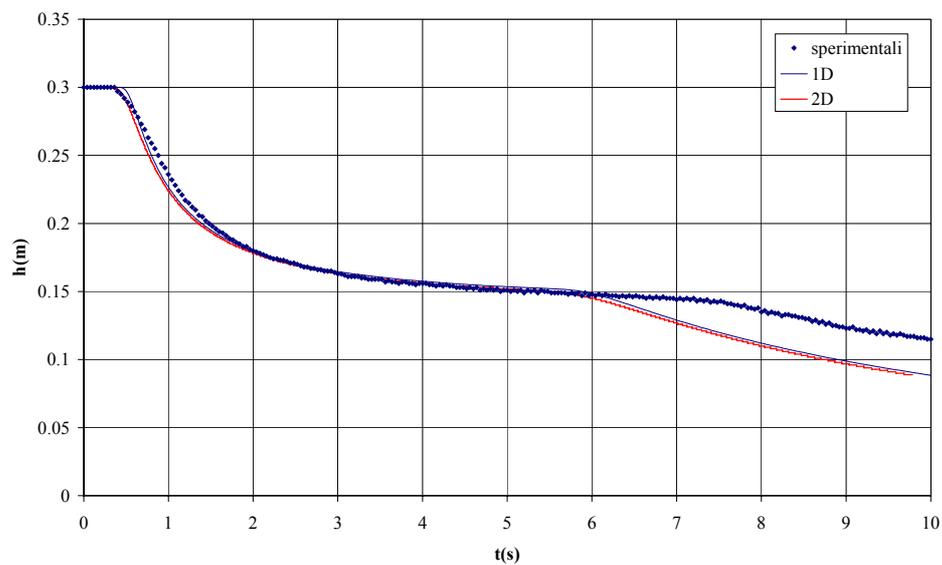


Figura 6.59a-Andamento dei livelli idrici nel punto S1

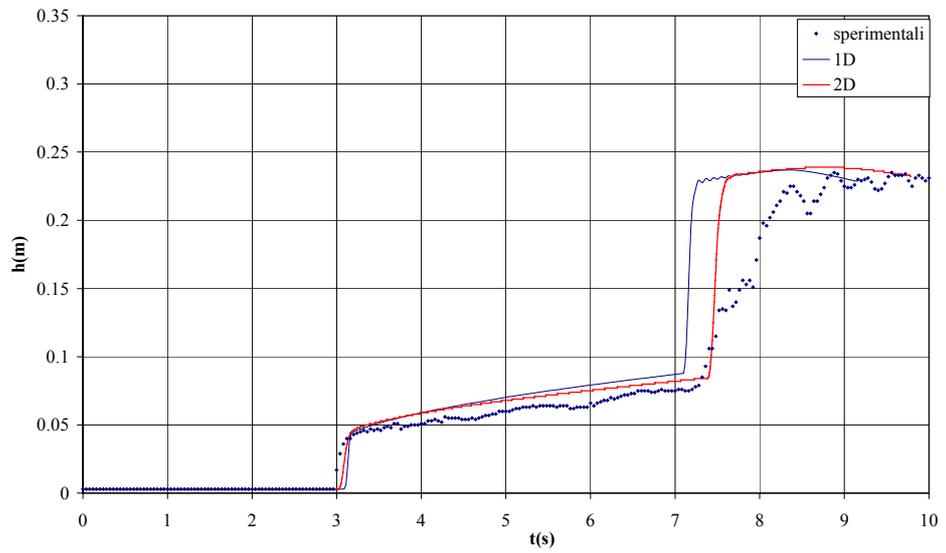


Figura 6.59b-Andamento dei livelli idrici nel punto S2

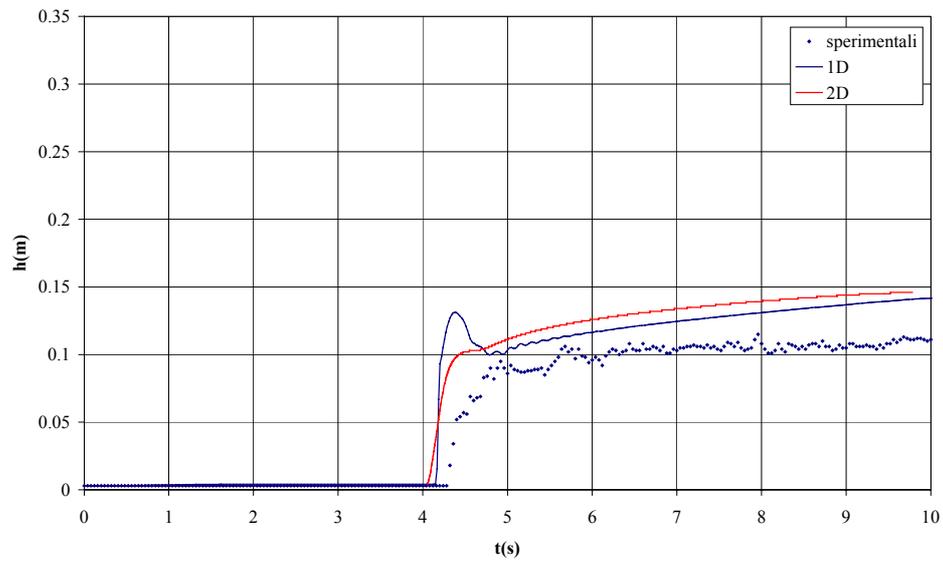


Figura 6.59c Andamento dei livelli idrici nel punto S3

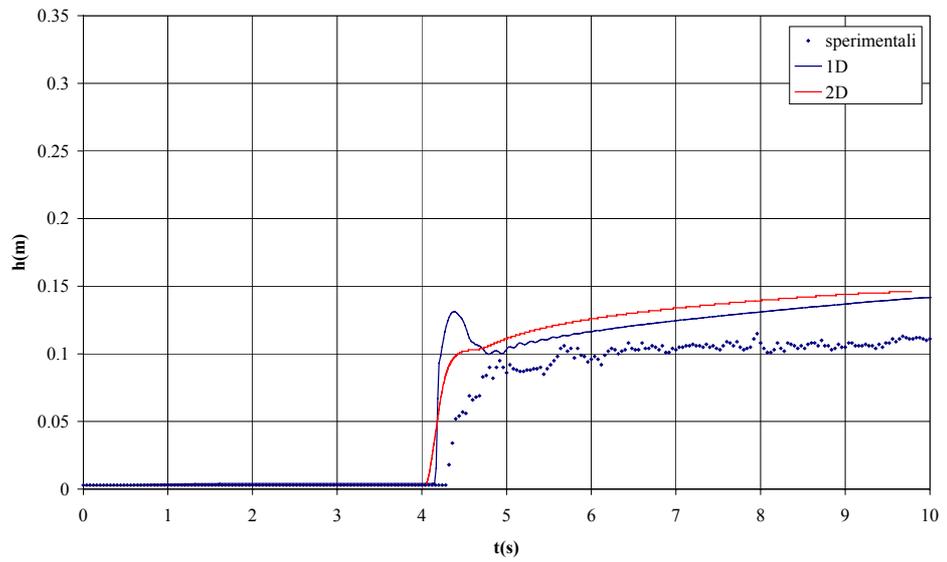


Figura 6.59d Andamento dei livelli idrici nel punto S4

Come si può vedere dalla figura 6.59a anche il codice bidimensionale all'interno del serbatoio simula una maggior tendenza allo svuotamento, in questo modo si sovrastima il picco dei livelli nelle sezioni a valle della diga (fig 6.59b,c,d).

6.2.2.4. Prove Hydraulic Laboratory Research –Chatelet (Bento Franco A. Betamio de Almeida A 2000)

Come per le prove precedenti l'apparato sperimentale è stato già descritto nel paragrafo 6.1.4.8

Si riporta il confronto tra simulazioni mono e bidimensionali. Il CFL utilizzato nelle elaborazioni è stato 0.7, la griglia di calcolo bidimensionale è stata suddivisa in elementi quadrati di lato 2.5 cm.

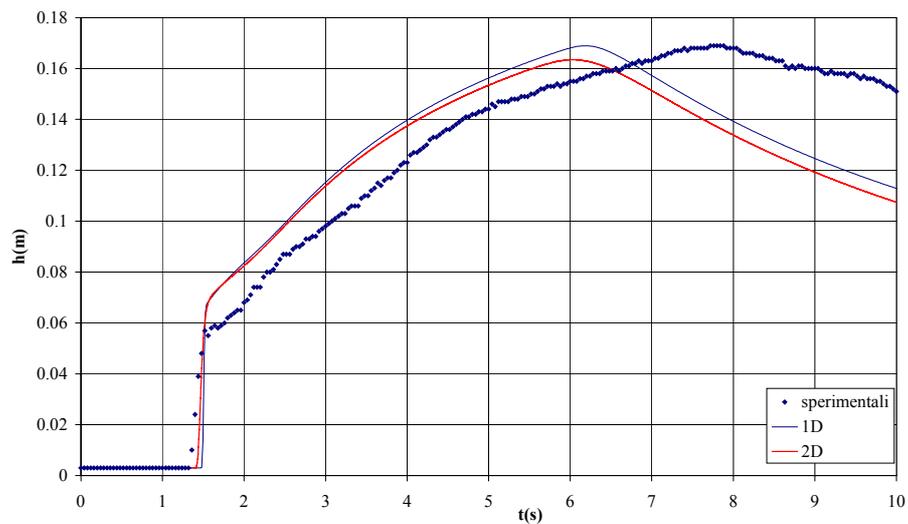


Figura 6.60a- Prova CH1-Andamento dei livelli misurati e calcolati P1

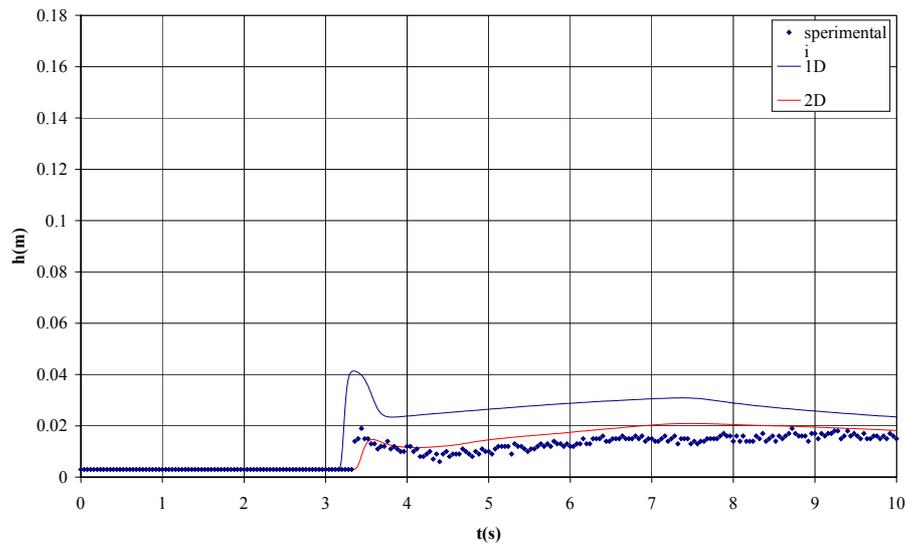


Figura 6.60b-Prova CH1-Andamento dei livelli misurati e calcolati P2

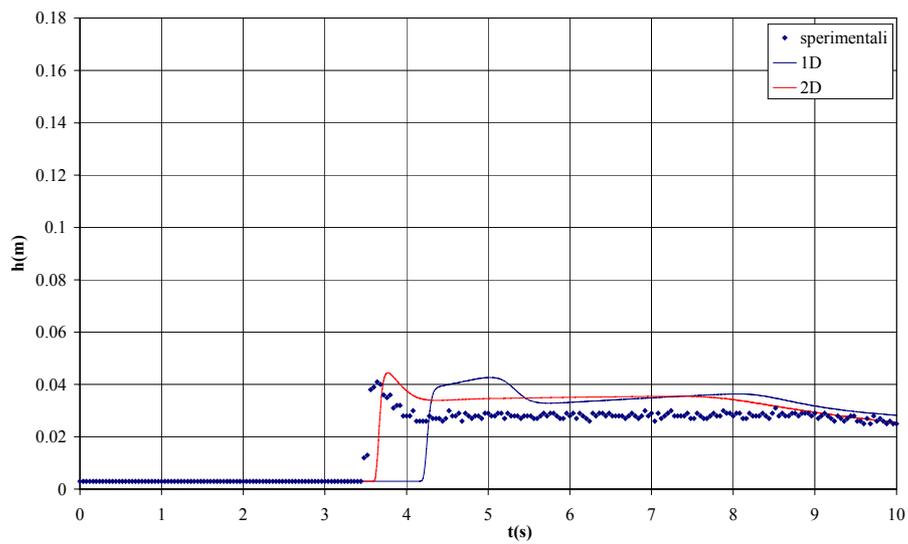


Figura 6.60c-Prova CH1-Andamento dei livelli misurati e calcolati P3

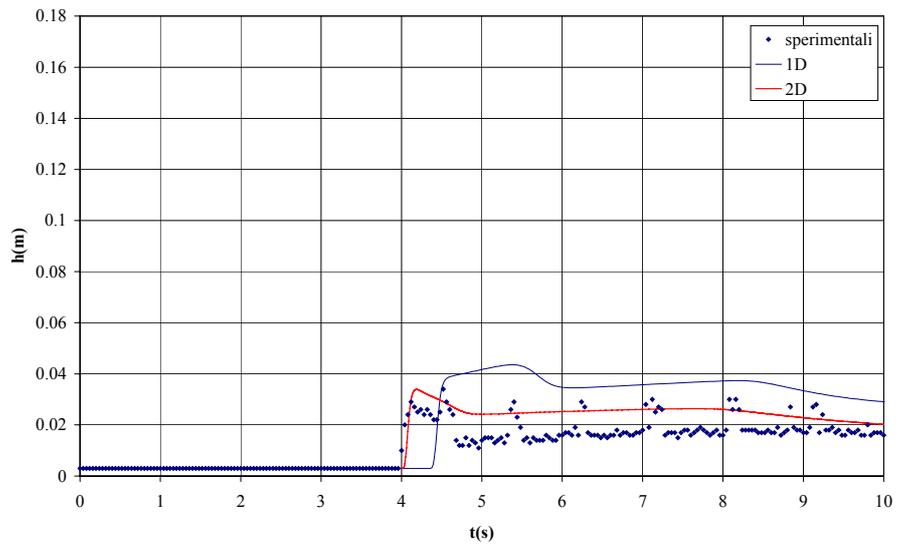


Figura 6.60d- Prova CH1-Andamento dei livelli misurati e calcolati P4

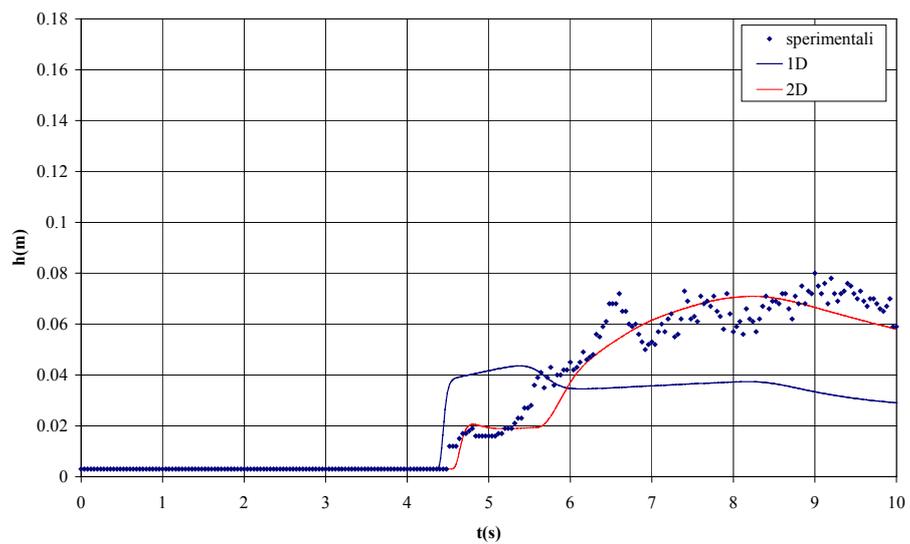


Figura 6.60e- Prova CH1-Andamento dei livelli misurati e calcolati P5

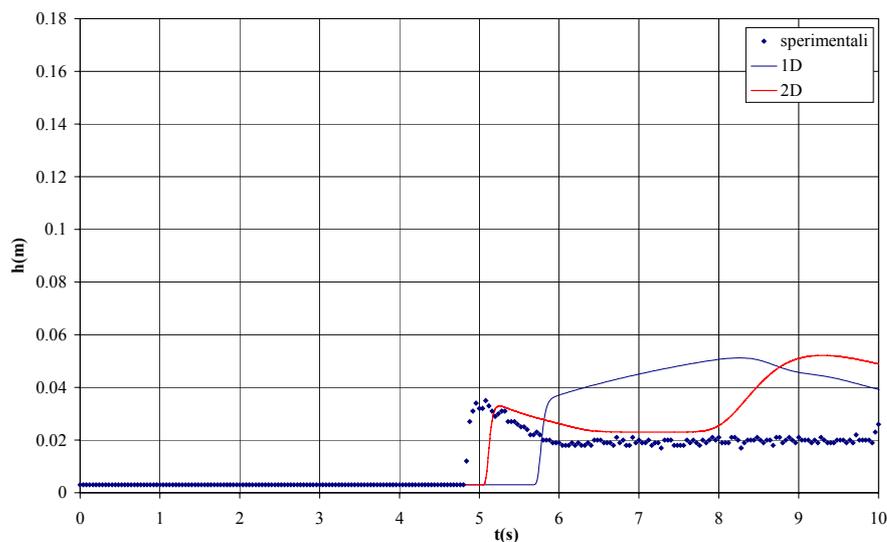


Figura 6.60f- Prova CH1-Andamento dei livelli misurati e calcolati P6

Dalle figure 6.60 a. si vede come il codice di calcolo bidimensionale riesca a riprodurre meglio il fenomeno rispetto al codice mono dimensionale (fig 6.31a-6.31f). In figura 6.60a si nota comunque una forte differenza tra simulazione ed osservazioni, dopo i 6 secondi il serbatoio nella simulazione si svuota più velocemente che nella realtà. Inoltre in figura 6.60f si nota una riflessione nei risultati della simulazione che non appare dai dati sperimentali. Tuttavia la riflessione avviene in realtà, ma ad un istante di tempo successivo rispetto ai dati registrati (Soares Frazao 2002).

Esistono poi nei dati registrati una serie di fluttuazioni che il modello numerico non riproduce; una maglia di calcolo più raffinata potrebbe migliorare i risultati.

6.2.2.5. Prove UCL (Soares Frazao et al 1998)

Il modello è costituito da un serbatoio a pianta quadrata ed un canale a forma di L. Il moto è prevalentemente bidimensionale all'interno del serbatoio e in corrispondenza del gomito del canale. In corrispondenza dei due tratti rettilinei del canale la propagazione è prevalentemente monodimensionale. Questa prova sperimentale è stata sviluppata nell'ambito del CADAM per l'interesse legato alla propagazione in un canale che presenta un brusco cambio di direzione, e per la propagazione verso monte del risalto che si forma in corrispondenza del gomito stesso. La serie di riflessioni che si generano permette di verificare le capacità del modello bidimensionale.

I due tronchi del canale ad L sono lunghi 3.92 m e 2.92 m rispettivamente (vedi fig 6.61) e sono connessi da un elemento quadrato di dimensioni 0.495m x 0.495m. La pendenza del canale è nulla. Una paratoia connette il serbatoio al canale. Il serbatoio si trova a quota -33 cm rispetto al fondo del canale. Il tirante idrico all'interno del serbatoio è di 53 cm, a valle è 0.01 m (caso di fondo bagnato) ovvero assente (fondo asciutto). Al termine del canale è posto uno stramazzo. Il coefficiente di manning tarato con prove in moto uniforme è $0.0095 \text{ s/m}^{1/3}$.

Il dominio di calcolo è stato suddiviso in celle quadrate di 5 cm di lato. Il CFL utilizzato nelle elaborazioni è 0.9.

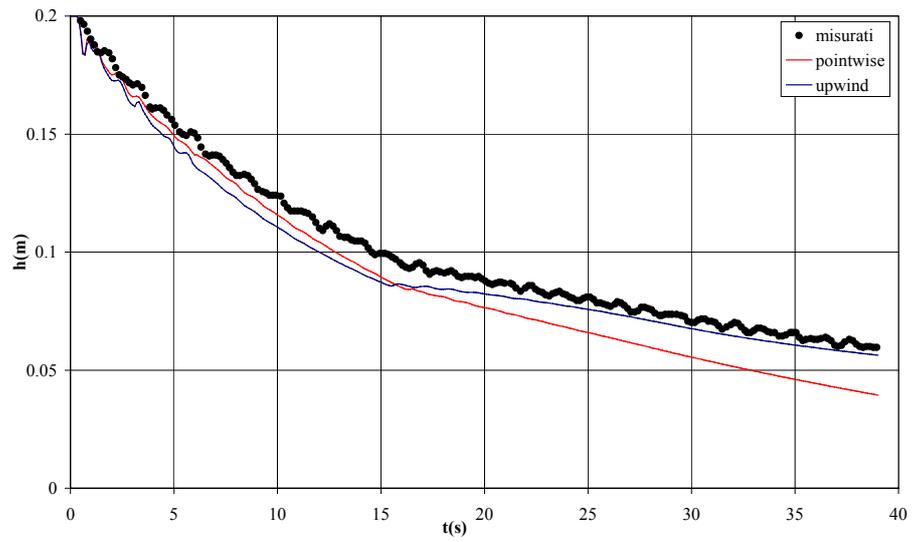


Figura 6.62a-Prova B1-Idrogramma dei livelli nel punto P1

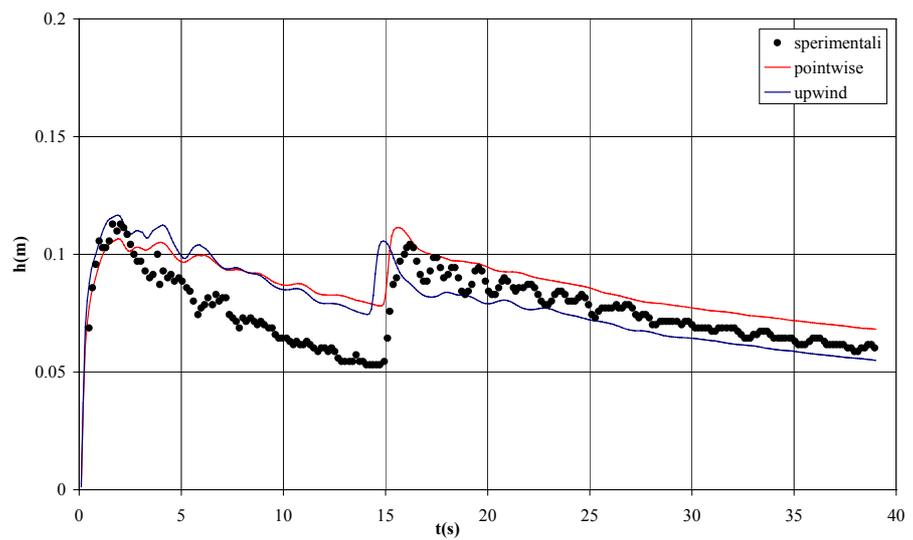


Figura 6.62b-Prova B1-Idrogramma dei livelli nel punto P2

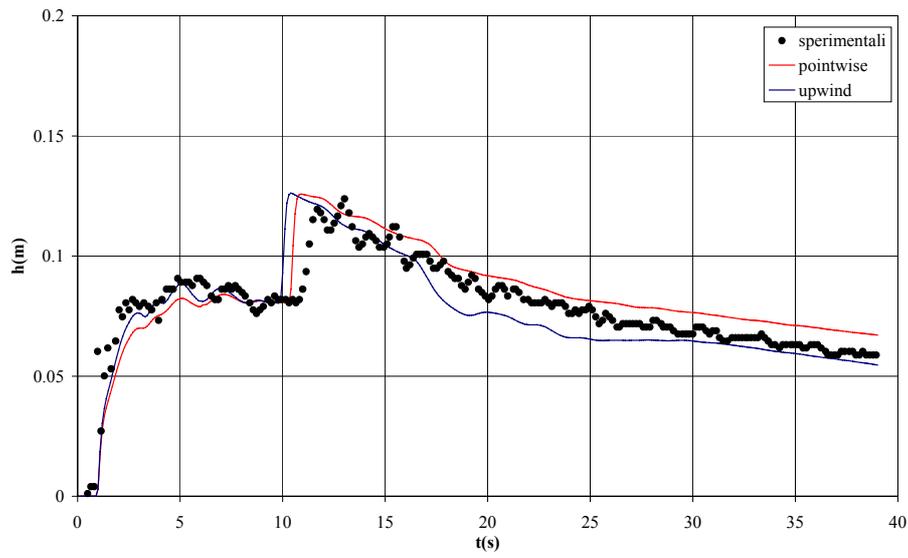


Figura 6.62c-Prova B1-Idrogramma dei livelli nel punto P3

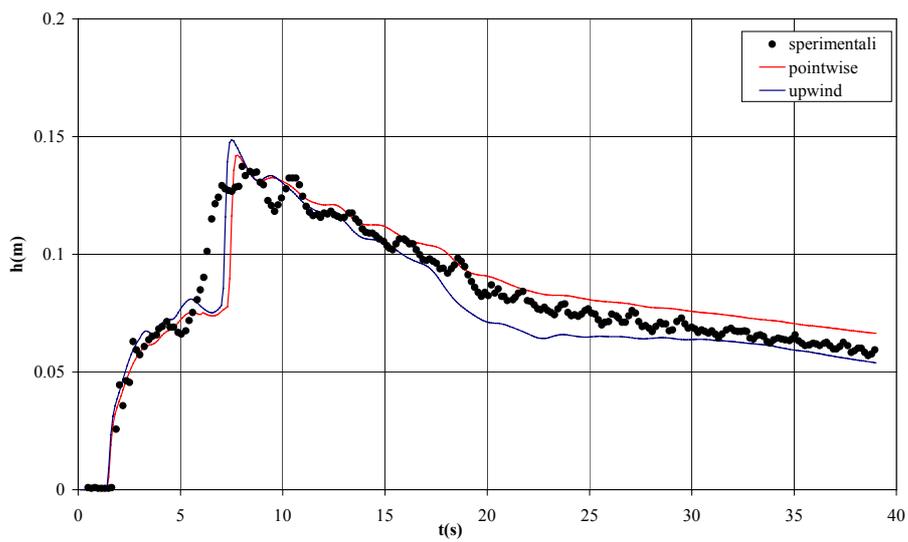


Figura 6.62d-Prova B1-Idrogramma dei livelli nel punto P4

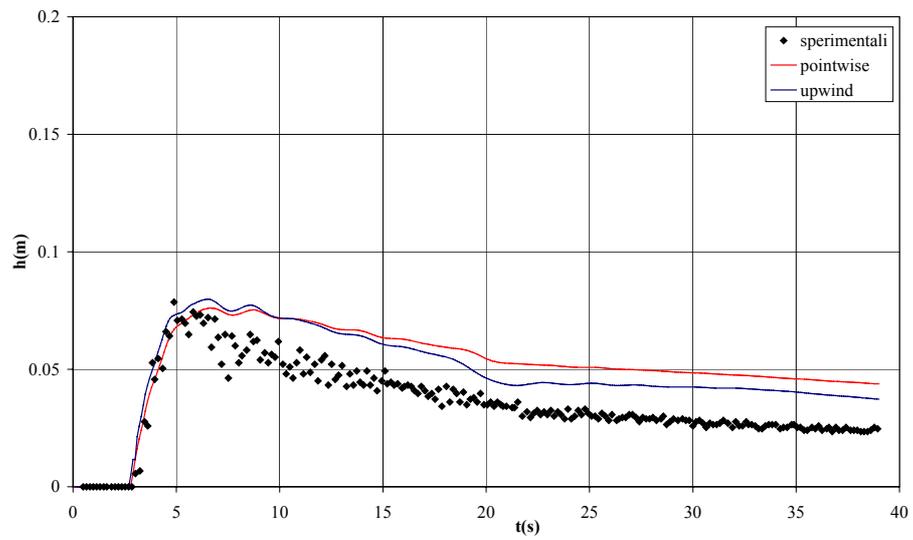


Figura 6.62e-Prova B1-Idrogramma dei livelli nel punto P5

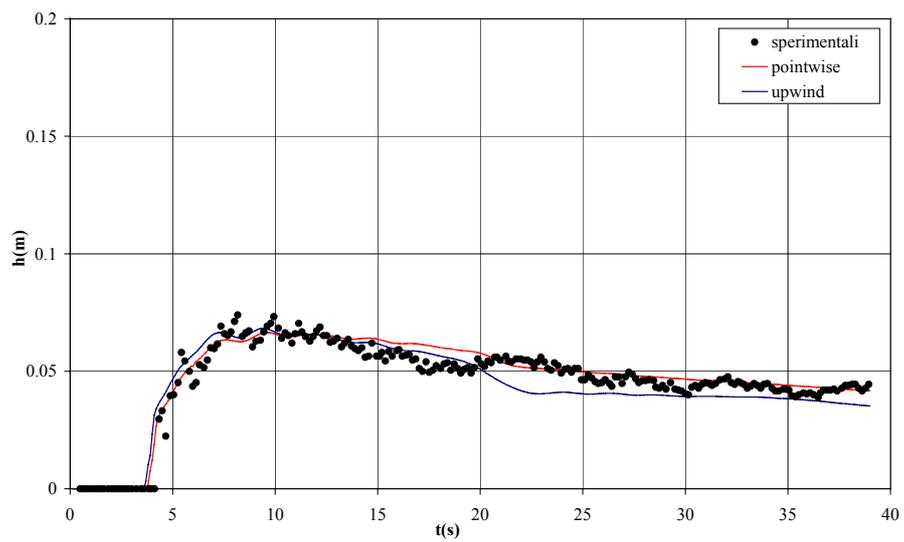


Figura 6.62f-Prova B1-Idrogramma dei livelli nel punto P6

Come si vede dalle figure 6.62a-f il trattamento dei termini sorgente di tipo upwind riesce a riprodurre il fenomeno in modo più corretto. Siamo infatti in presenza di un brusco cambio di pendenza in corrispondenza della paratoia, che il trattamento centrato non è in grado di trattare correttamente. Se infatti si visualizzano i vettori velocità in corrispondenza del cambio di pendenza ci si accorge come quest'ultimo non riesca a simulare correttamente il deflusso dal serbatoio, al contrario di quello upwind (vedi figura 6.63a). Questo è particolarmente evidente nella figura 6.62a, in quanto la stazione di misura è all'interno del serbatoio. Il trattamento upwind riproduce correttamente lo svuotamento del serbatoio.

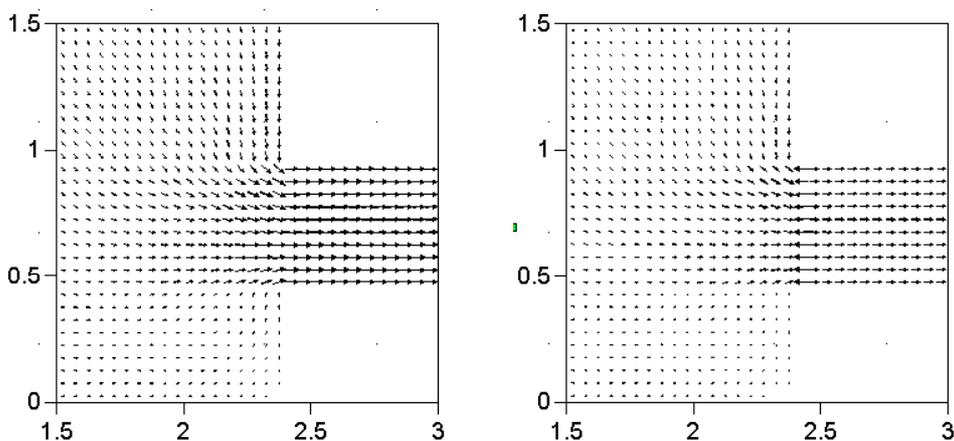


Figura 6.63 a-b-particolare delle mappe di velocità trattamento termine sorgente upwind (a) e pointwise (b)

Si può inoltre notare dall'idrogramma P2 (fig 6.62b) che entrambi i trattamenti sorgente simulano la riflessione dell'onda in anticipo rispetto al dato misurato, l'onda simulata viaggia più velocemente che nella realtà. Una ragione potrebbe essere il valore di resistenza al moto utilizzato nelle simulazioni. Utilizzando due valori diversi, uno per il fondo del canale, ed uno per le pareti laterali, come suggerito nell'ambito del CADAM, i risultati potrebbero migliorare. In generale si nota un buon accordo tra i risultati delle simulazioni e i dati sperimentali.

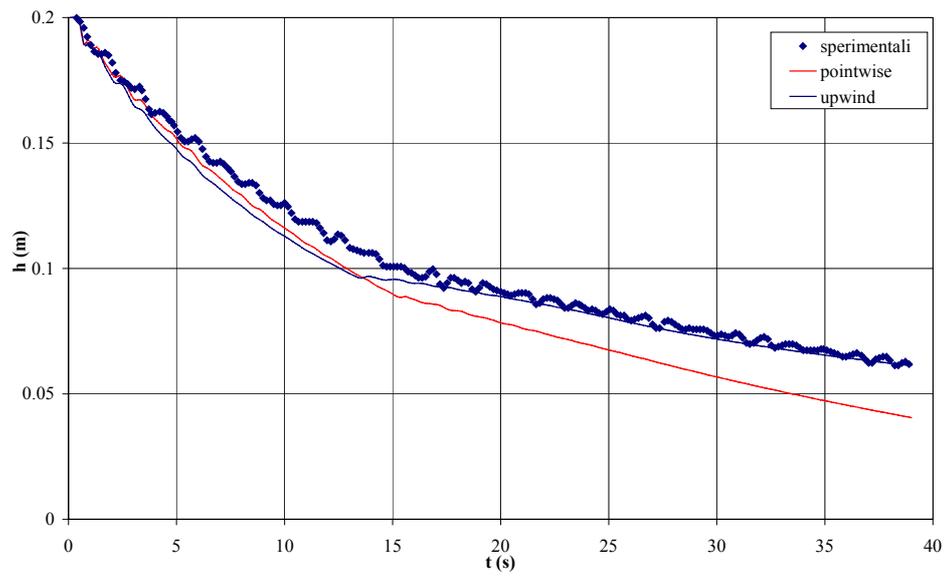


Figura 6.64a-Prova B2-Idrogramma dei livelli nel punto P1

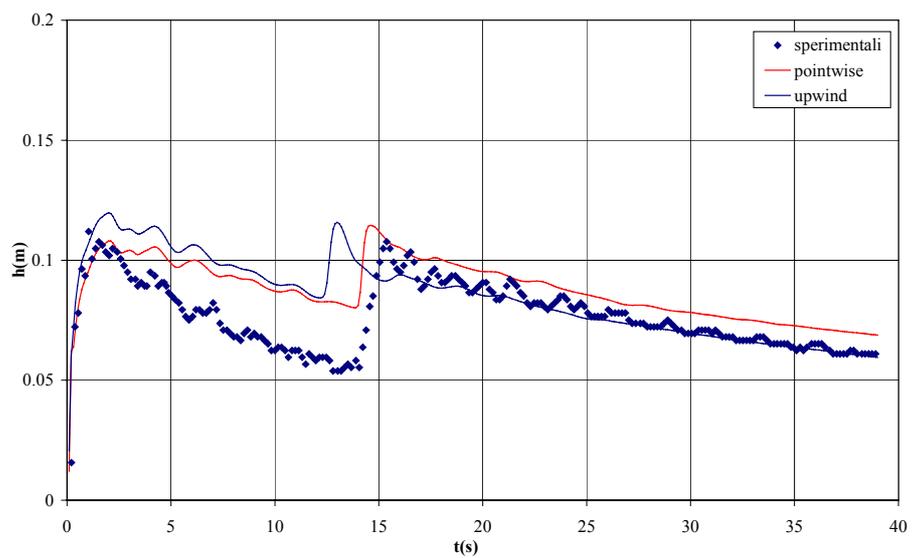


Figura 6.64b-Prova B2-Idrogramma dei livelli nel punto P2

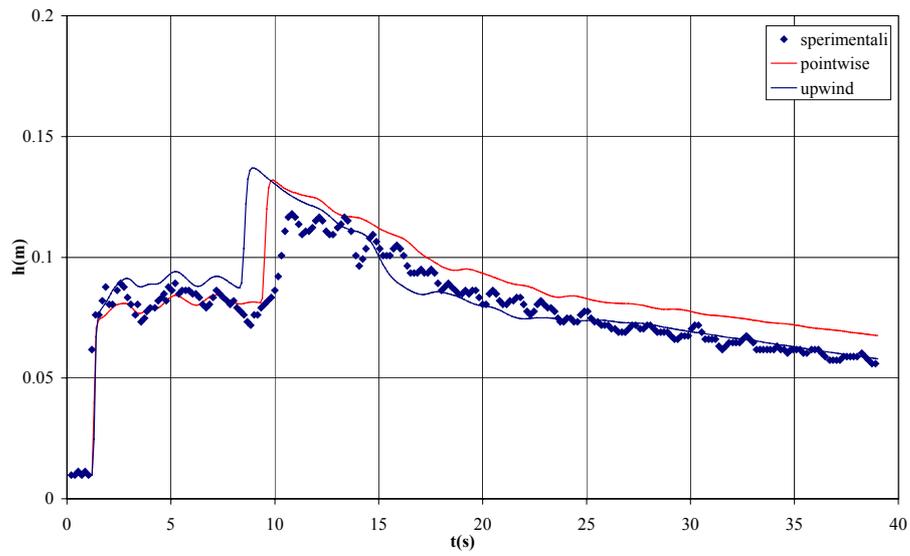


Figura 6.64c-Prova B2-Idrogramma dei livelli nel punto P3

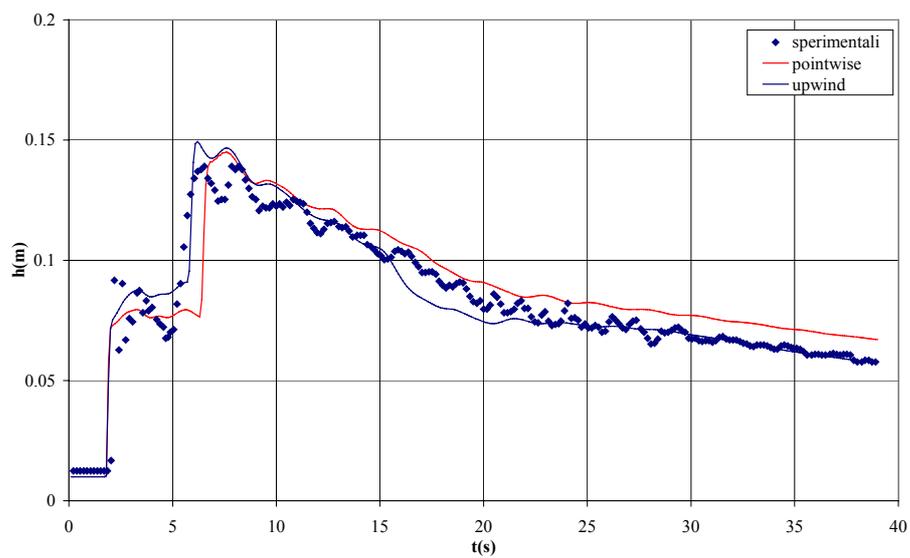


Figura 6.64d-Prova B2-Idrogramma dei livelli nel punto P4

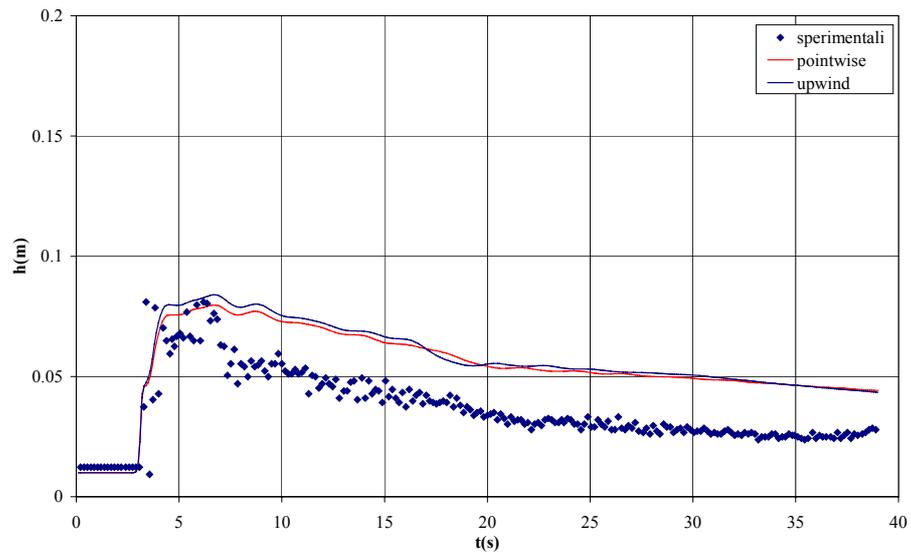


Figura 6.64e-Prova B2-Idrogramma dei livelli nel punto P5

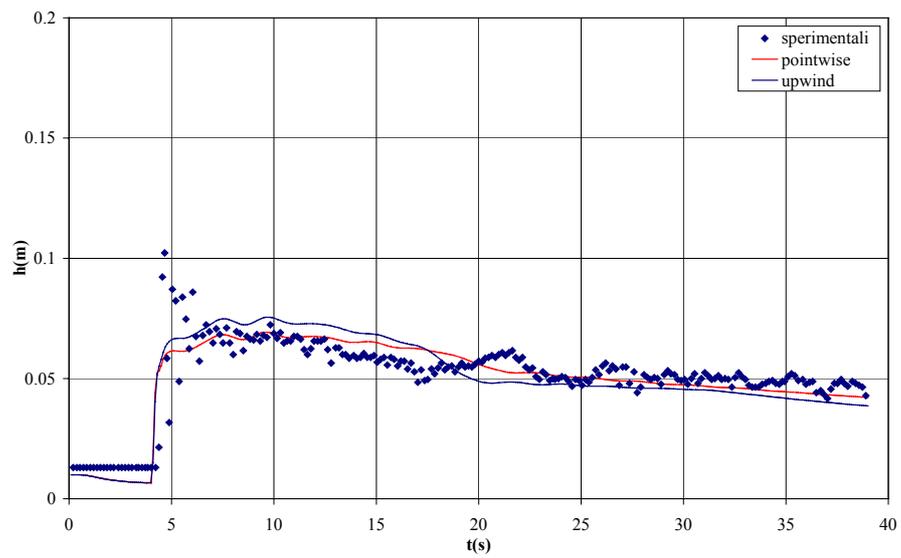


Figura 6.64f-Prova B6-Idrogramma dei livelli nel punto P6

Dalla campagna di prove sperimentali è stato possibile determinare il campo di velocità, dopo 7 secondi dall'apertura della paratoia, in corrispondenza del gomito (fig 6.65). Come si può vedere la riflessione nella gomito è già avvenuta e si ha la propagazione a monte del risalto. Il codice bidimensionale non è in grado di riprodurre il ricircolo in corrispondenza del brusco cambio di direzione, a meno che non si inseriscono i termini legati all rotore della velocità, come illustrato nel paragrafo 1.4. Dalle figure 6.66 si nota come il modello matematico sia in grado di riprodurre il distacco di vena fluida a valle del gomito, che avviene nella realtà.

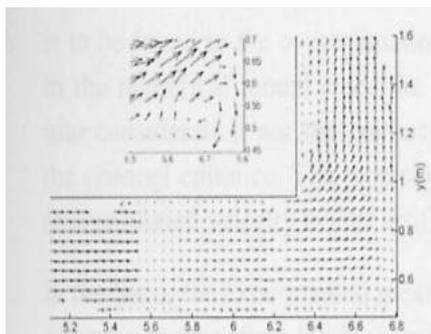


Figura 6.65-Particolare del campo di velocità osservato a 7 secondi

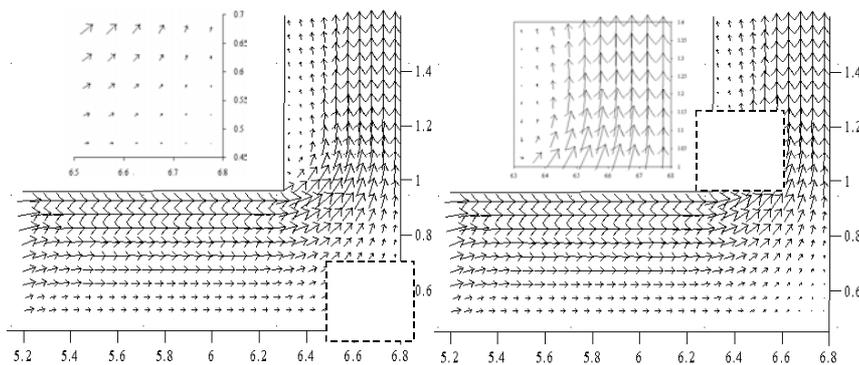


Figura 6.66-Particolare del campo di velocità simulato a 7 secondi

6.3.3. Presenza di ostacoli

Per ultimo si è fatto riferimento a prove che prevedevano l'impatto della corrente contro un ostacolo. L'ultima fra queste, è stata scelta come benchmark per il progetto Europeo IMPACT che è ancora in svolgimento. I dati sperimentali sono stati forniti prima della pubblicazione degli atti finali, e per questo si ringrazia la Dr Ing Sandra Soares Frazao dell'UCL (Frazao e Zech 2002). I risultati che si presentano nel paragrafo 6.3.3.3 saranno esposti dalla scrivente durante il terzo Workshop, Louvian La Neuve il 5-7 Novembre 2003 (Petaccia, Savi 2003)

6.3.3.1. Prove Laboratorio CITEEC-2 (Brufau et al 2002)

L'apparato sperimentale è lo stesso descritto nel paragrafo 6.2.1.4, con l'unica differenza della presenza nella vasca a valle della paratoia di un ostacolo a forma di piramide, come si vede nella figura 6.67.

A differenza del caso precedente la diversa schematizzazione del termine sorgente gioca un ruolo molto importante, perché nel caso di trattamento upwind si riescono ad evitare le oscillazioni del pelo liquido in corrispondenza della piramide che invece non possono essere evitate con la schematizzazione centrata. La griglia di calcolo è stata suddivisa in 2908 elementi sia triangolari che rettangolari (Δx medio 10 cm), in modo da riuscire a schematizzare nel modo più opportuno la piramide.

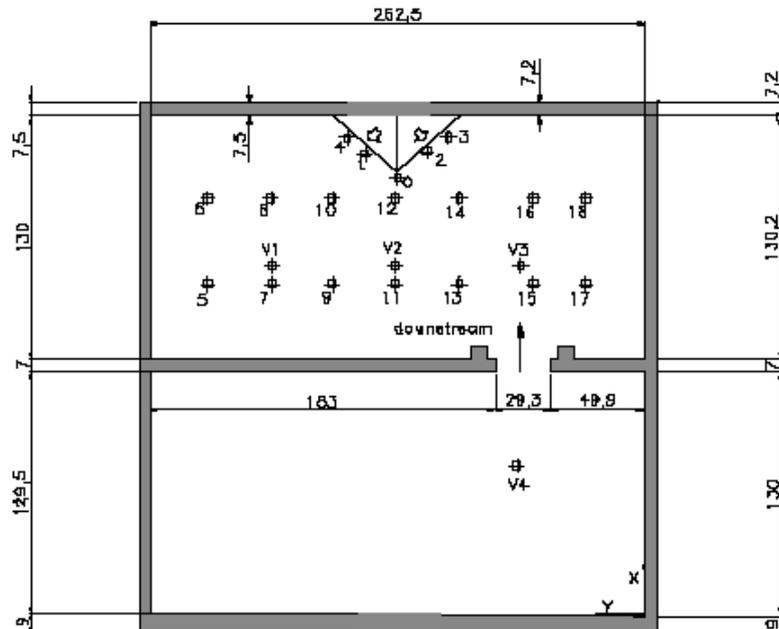


Figura 6.67 Descrizione dell'apparato sperimentale

Si riportano in seguito gli andamenti degli idrogrammi dei livelli nelle cinque sezioni in corrispondenza della piramide (P0, P1, P2, P3, P4), dove le differenze delle diverse schematizzazioni del termine di pendenza del fondo risultano più evidenti.

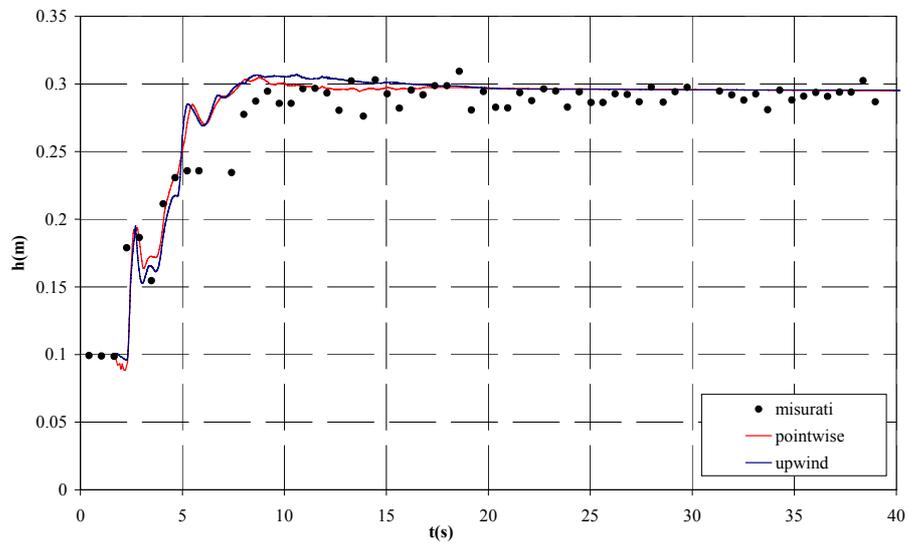


Figura 6.68a-Idrogramma dei livelli nel punto P0

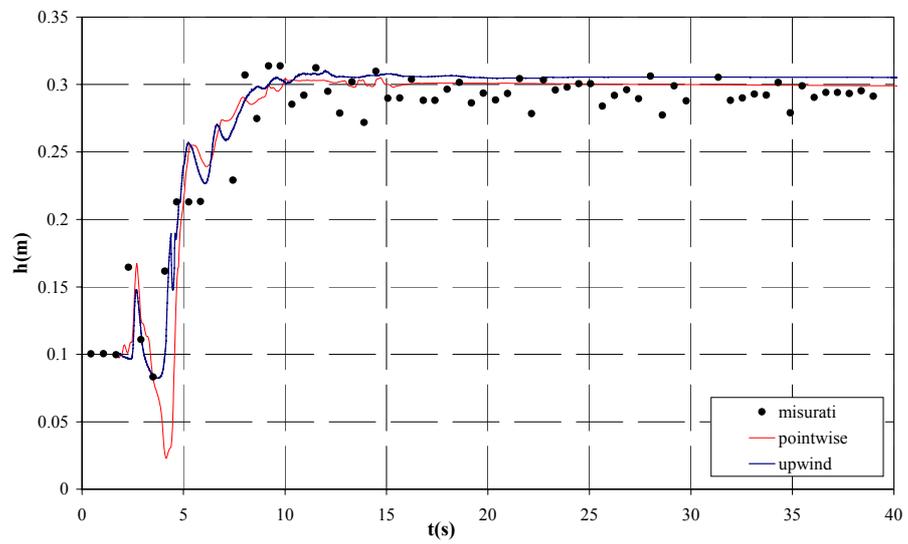


Figura 6.68b-Idrogramma dei livelli nel punto P1

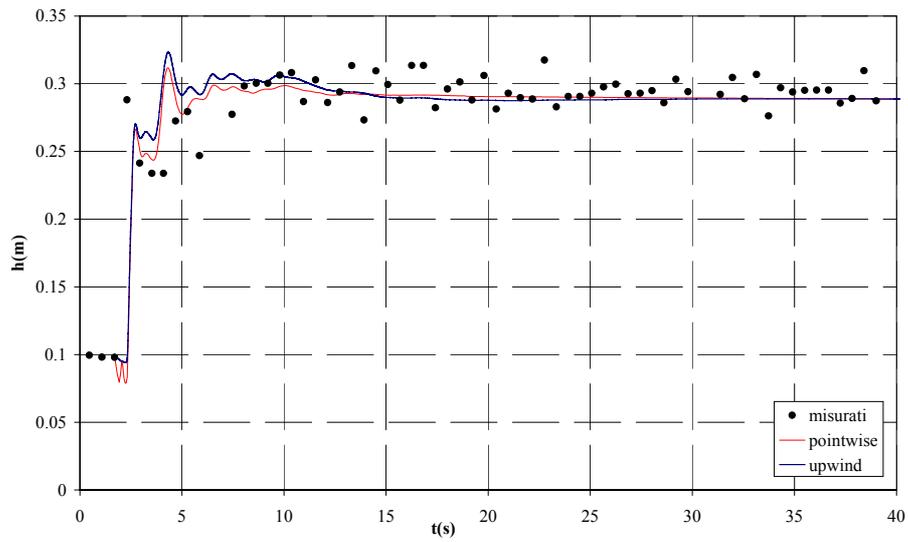


Figura 6.68c-Idrogramma dei livelli nel punto P2

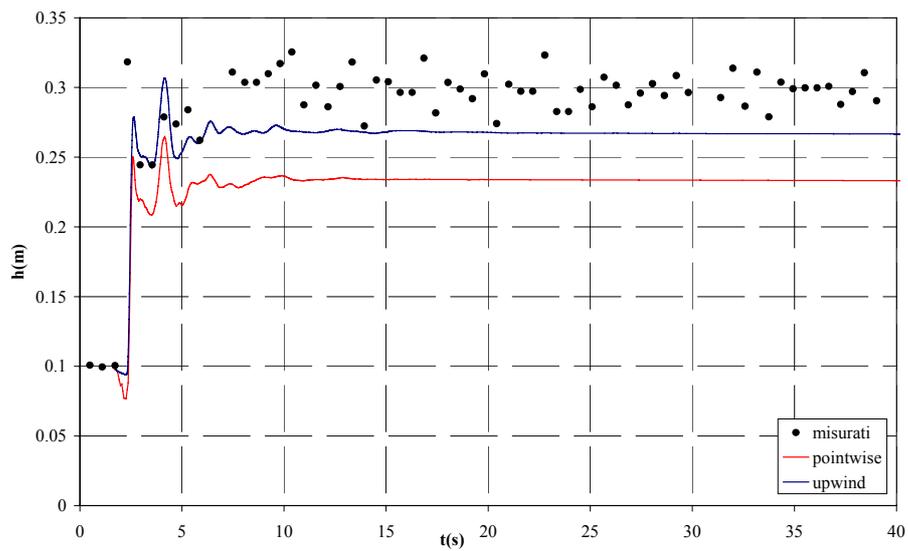


Figura 6.68d-Idrogramma dei livelli nel punto P3

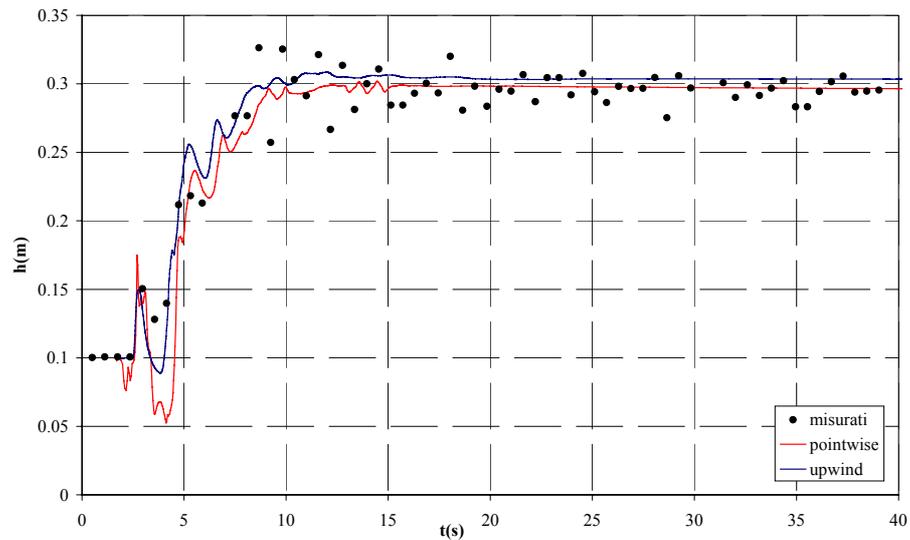


Figura 6.68e-Idrogramma dei livelli nel punto P4

Come si può notare in questo caso la schematizzazione del termine sorgente ricopre un ruolo molto importante. Nelle sezioni vicino alla piramide nei primi istanti successivi all'apertura della paratoia il trattamento upwind riesce ad evitare le oscillazioni del pelo liquido che sono invece generate dalla schematizzazione pointwise. Quest'ultima infatti non è in grado di bilanciare le correzioni upwind dei flussi numerici, generati da differenze di livello ma non di quota assoluta tra due celle contigue.

Dall'esame dei vettori velocità si nota però come ci siano delle oscillazioni nel calcolo della portata che determinano dei vettori in corrispondenza della piramide nei primi istanti del moto. Questo è dovuto dalla scelta della schematizzazione upwind che verifica l'equazione di continuità ma non quella della quantità di moto nelle due direzioni del moto.

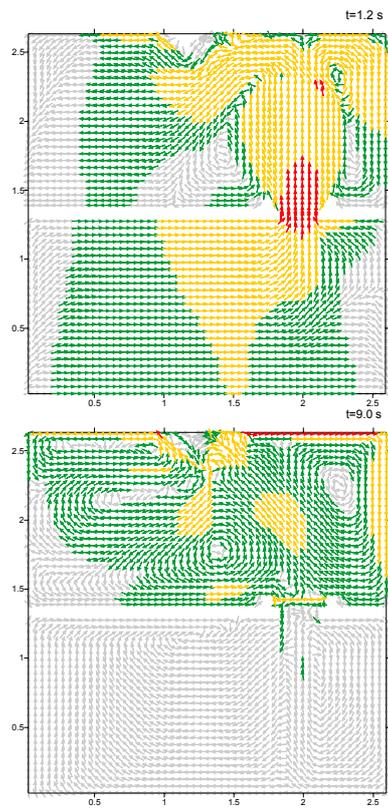
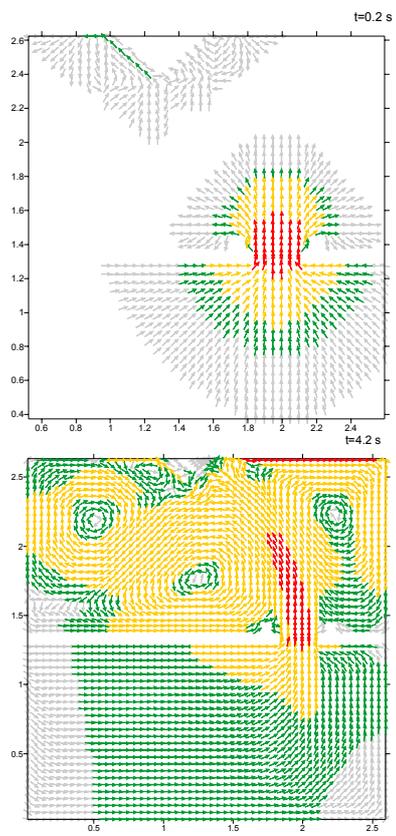
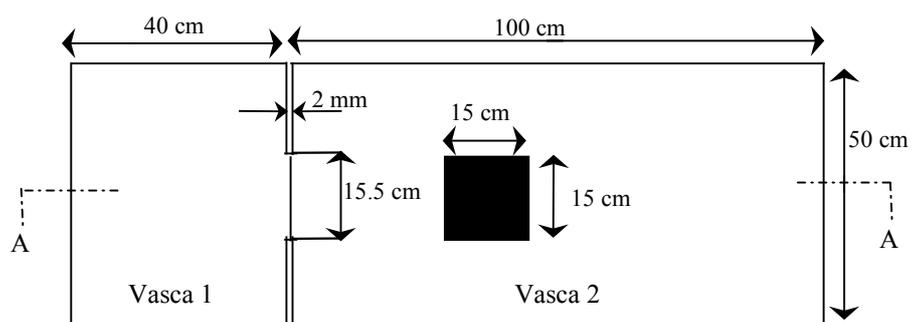


Figura 6.61 Andamento dei vettori velocità

6.3.3.2. Università di Pavia 2-Prova n 3 (Sturla 2000)

L'apparecchiatura sperimentale è stata già descritta nel paragrafo 6.2.1.3, la differenza è la presenza di un ostacolo di forma cubica nella seconda vasca. Il tirante idrico nella prima vasca è di 0.08 m, la seconda vasca è asciutta, il fondo orizzontale (vedi fig 6.62). Si è adottata la stessa discretizzazione spaziale già descritta nel paragrafo 6.2.1.3.



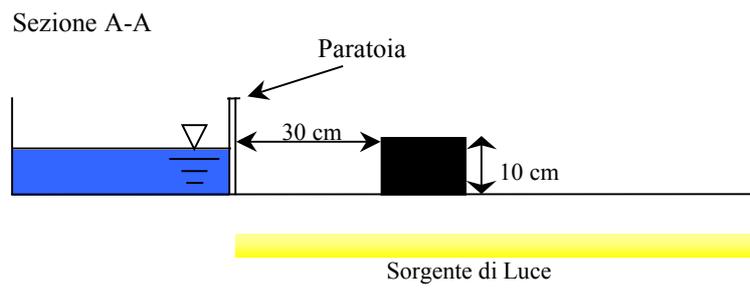
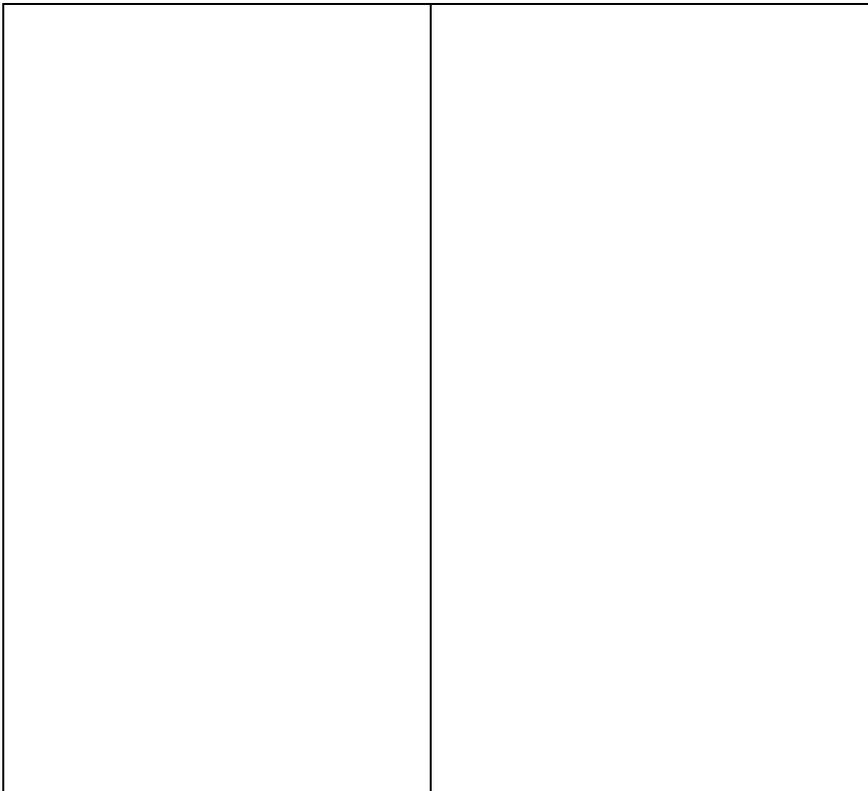


Figura 6.62 Descrizione dell'apparato sperimentale

Si riportano nelle figure seguenti i confronti tra immagini sperimentali, curve di livello dei tiranti idrici e mappe dei vettori velocità a vari istanti.



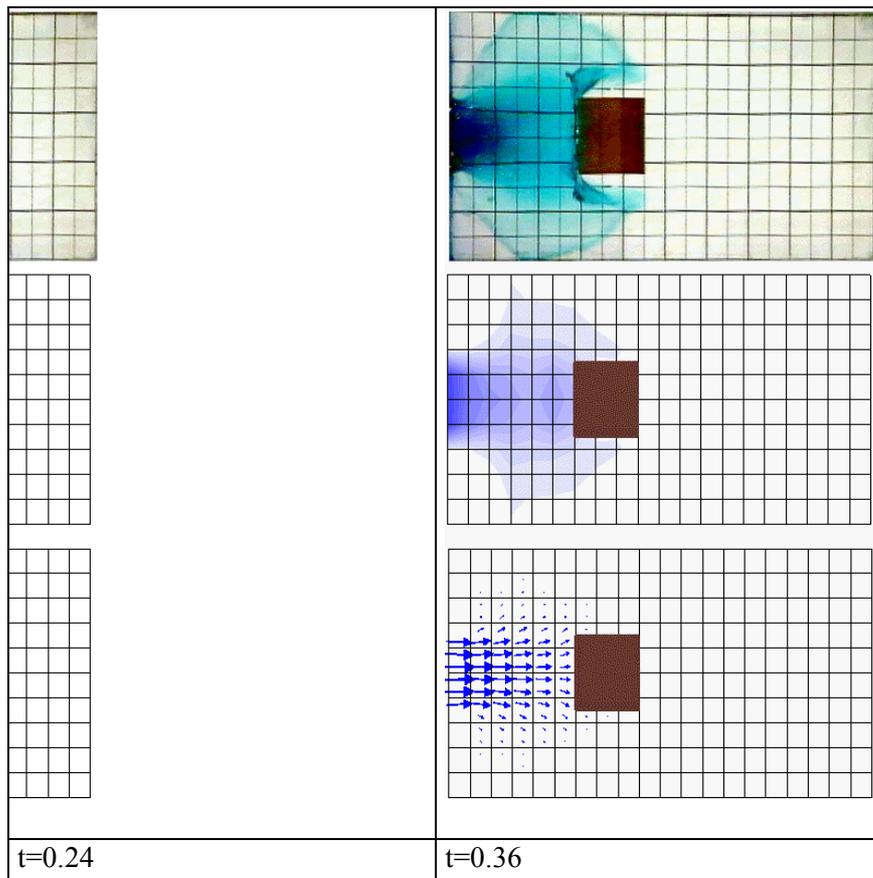


Figura 6.63a Confronto tra simulazioni ed osservazioni sperimentali

--	--

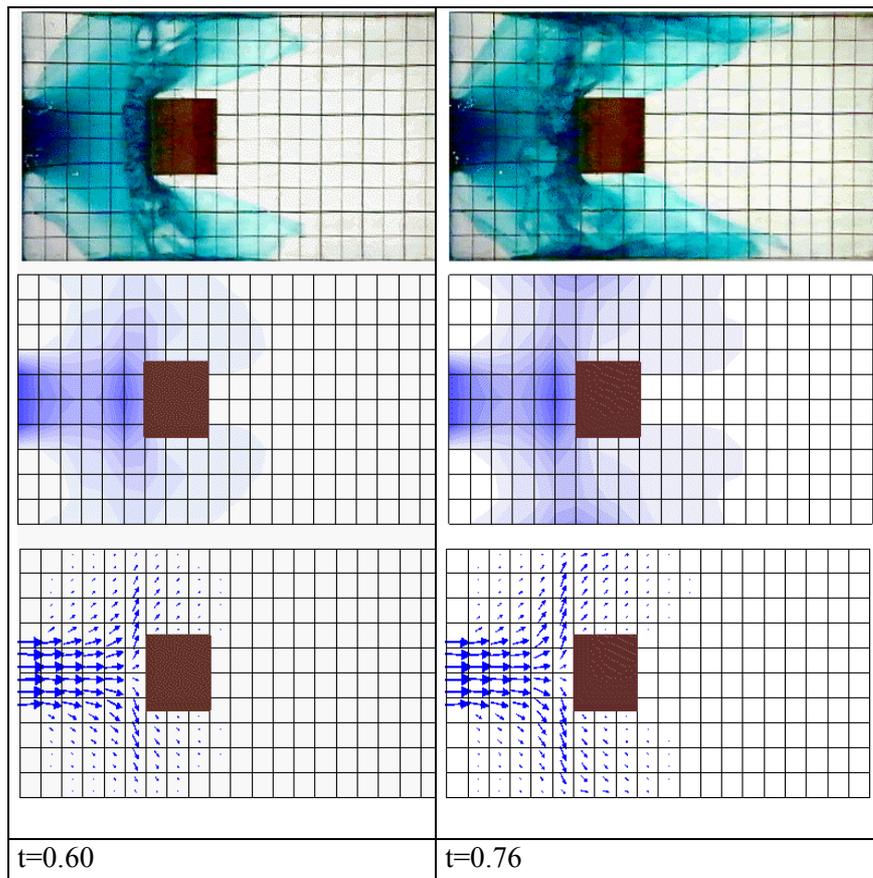


Figura 6.63b Confronto tra simulazioni ed osservazioni sperimentali

--	--

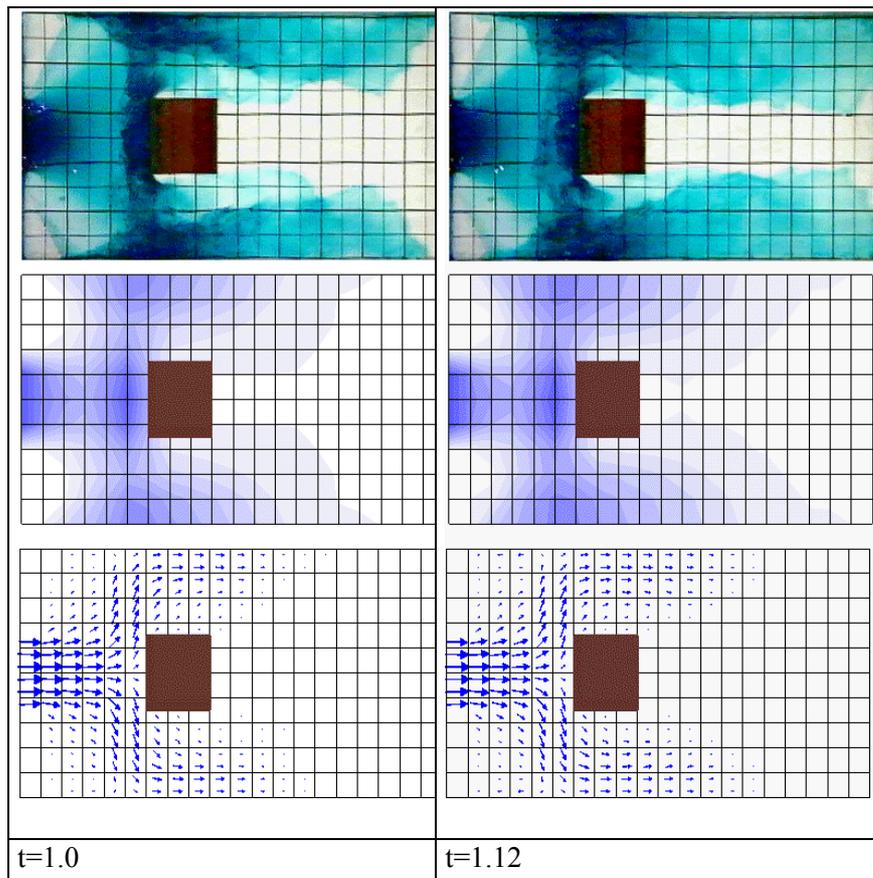


Figura 6.63c Confronto tra simulazioni ed osservazioni sperimentali

--	--

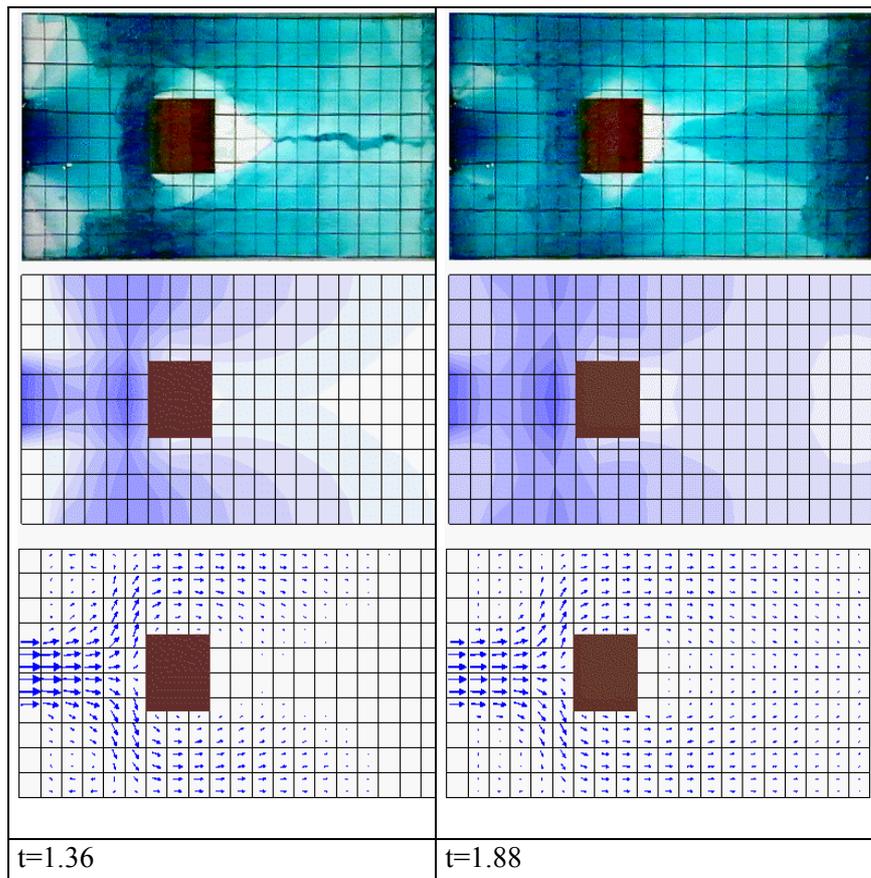


Figura 6.63d Confronto tra simulazioni ed osservazioni sperimentali

--	--

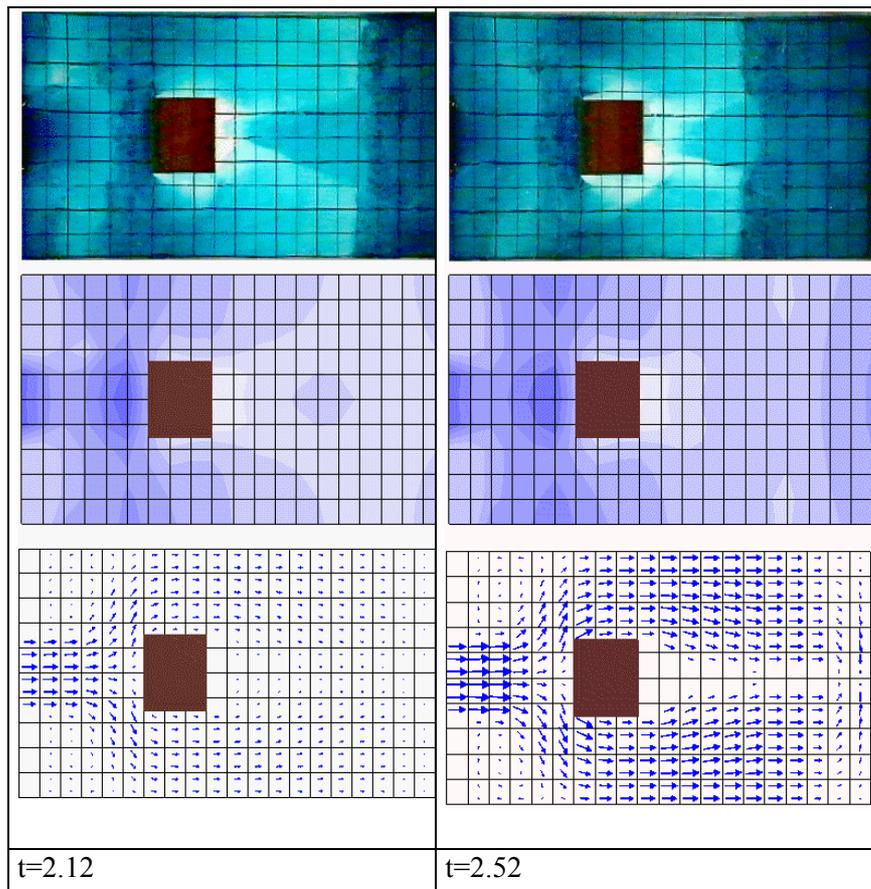


Figura 6.63e Confronto tra simulazioni ed osservazioni sperimentali

--	--

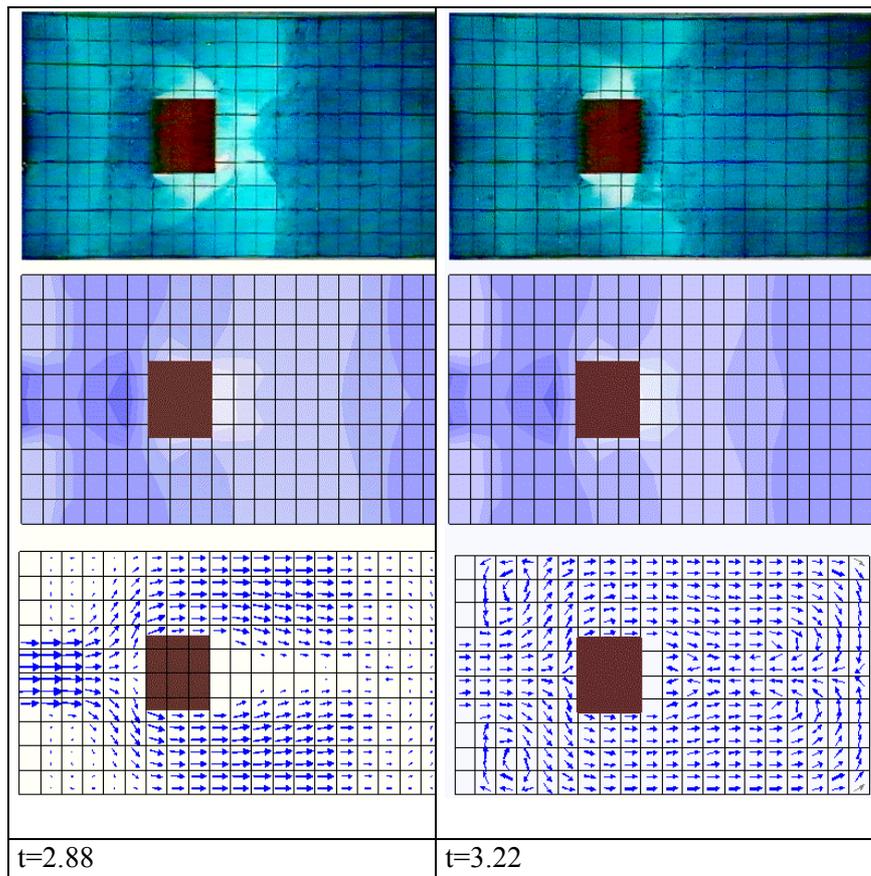


Figura 6.63f Confronto tra simulazioni ed osservazioni sperimentali

Dalle figure 6.63 f si nota come il solutore numerico riesce a riprodurre con buona approssimazione anche il ricircolo di portata a valle della diga e quello in corrispondenza della parete di fondo. I tempi in cui la corrente impatta con l'ostacolo sembrano buoni, anche se si nota un certo ritardo (vedi fig. 6.63 c e d).

6.3.3.3. Prove UCL (Soares Frazao e Zech 2002)

Questa serie di esperimenti è stata condotta nell'ambito del progetto IMPACT, che rappresenta la continuazione del CADAM. E' volto alla determinazione degli effetti di un singolo edificio su un flusso determinato da un Dam-Break. Da studi preliminari si è appurato che la presenza di ostacoli può influenzare molto la propagazione del moto specialmente nei primi istanti del fenomeno e nelle immediate vicinanze della diga. Non si può infatti tenerne in conto solo attraverso un aumento della scabrezza del fondo o una diminuzione della convettanza. La direzione del flusso è modificata, l'onda può riflettere contro l'ostacolo innalzando il livello di monte in modo significativo.

Queste prove sperimentali sono state condotte presso il laboratorio di Ingegneria Civile dell'Università Cattolica di Louvian La Neuve (UCL) in Belgio. Nella figura 6.64 è descritto l'apparato sperimentale con le posizioni dei punti di misura in cui sono stati calcolati livelli idrici e velocità.

caso si è scelta la condizione di riflessione. I calcoli sono stati eseguiti con un valore del CFL di 0.7, la griglia di calcolo è stata discretizzata in 12945 elementi rettangolari e triangolari, in modo da schematizzare in modo coerente l'ostacolo.

Come condizioni iniziali la quota di pelo liquido all'interno del serbatoio era 0.40 m, al di fuori era presente uno strato di acqua ferma di 0.01 m. Il valore di resistenza al moto utilizzato nei calcoli è $0.01\text{sm}^{-1/3}$.

Si riportano i confronti tra dati sperimentali e simulazioni degli andamenti dei tiranti idrici nelle sei stazioni di misura descritte in figura 6.64.

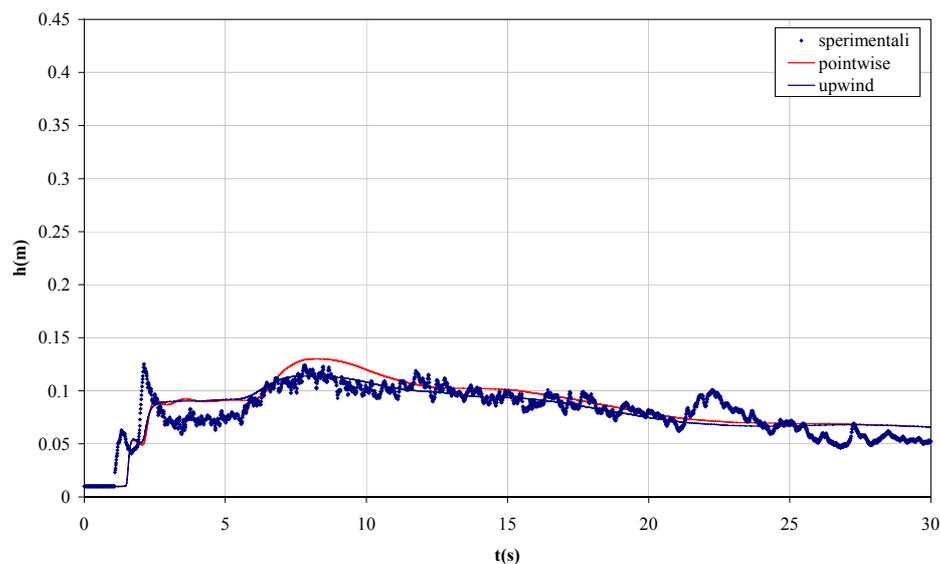


Figura 6.65a- Idrogramma dei livelli nella stazione G1

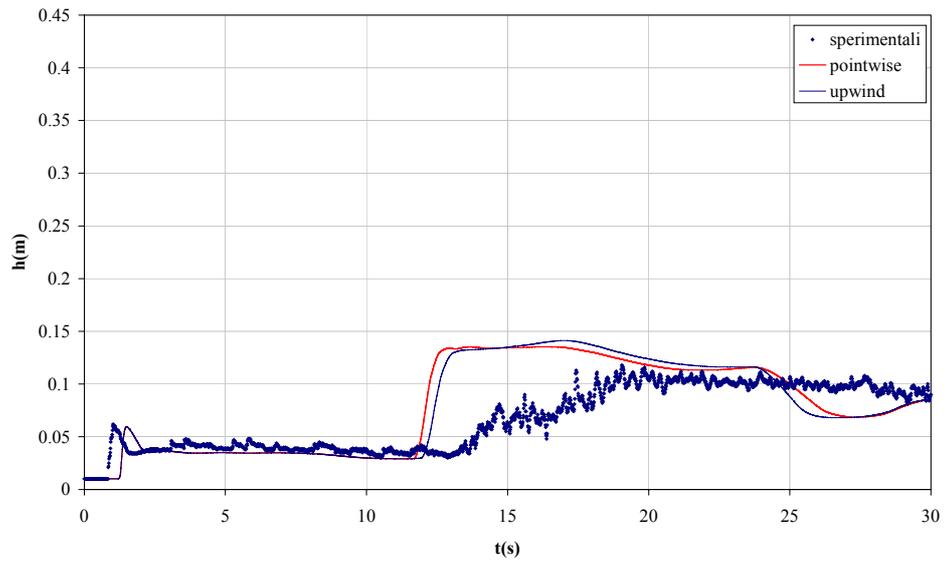


Figura 6.65b- Idrogramma dei livelli nella stazione G2

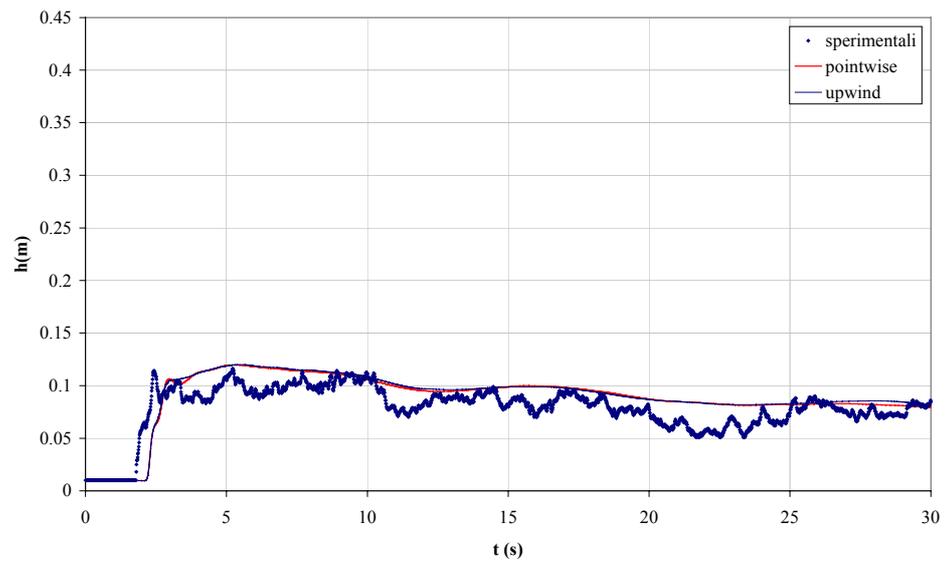


Figura 6.65c- Idrogramma dei livelli nella stazione G3

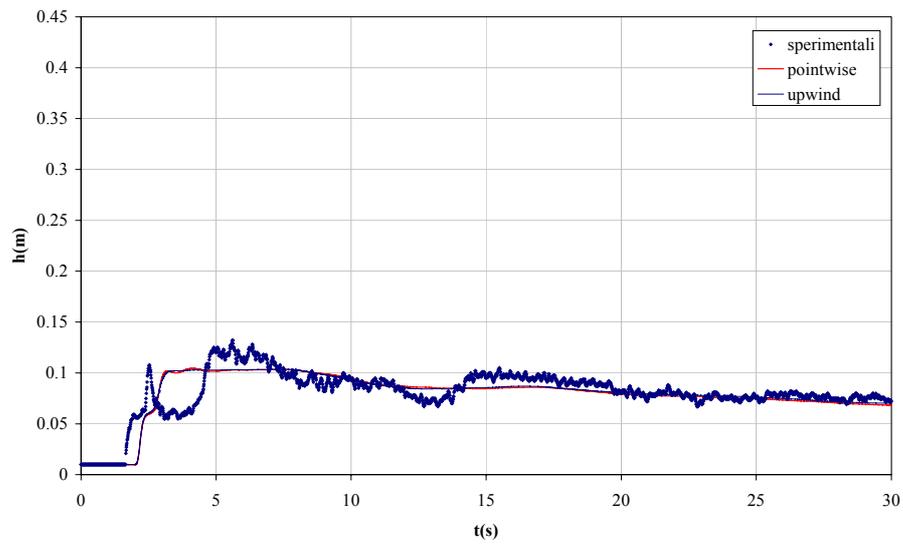


Figura 6.65d- Idrogramma dei livelli nella stazione G4

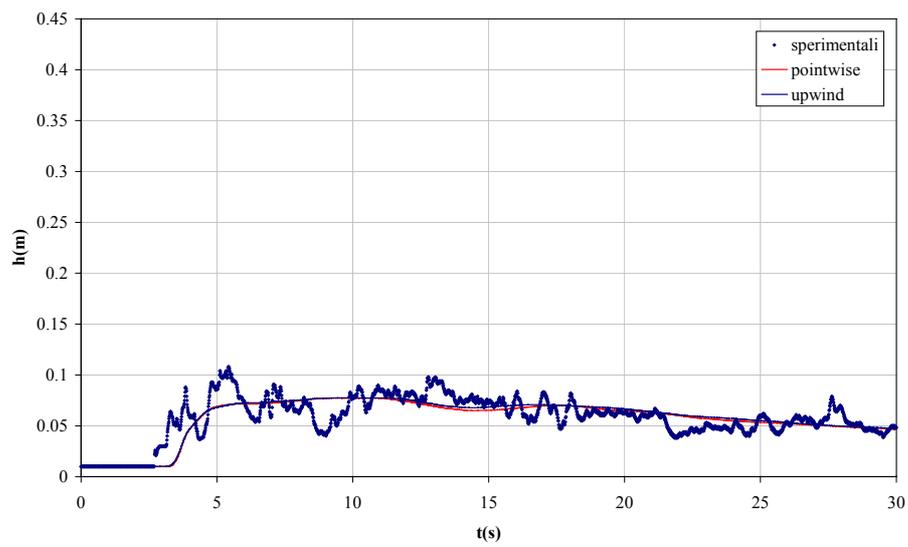


Figura 6.65e- Idrogramma dei livelli nella stazione G5

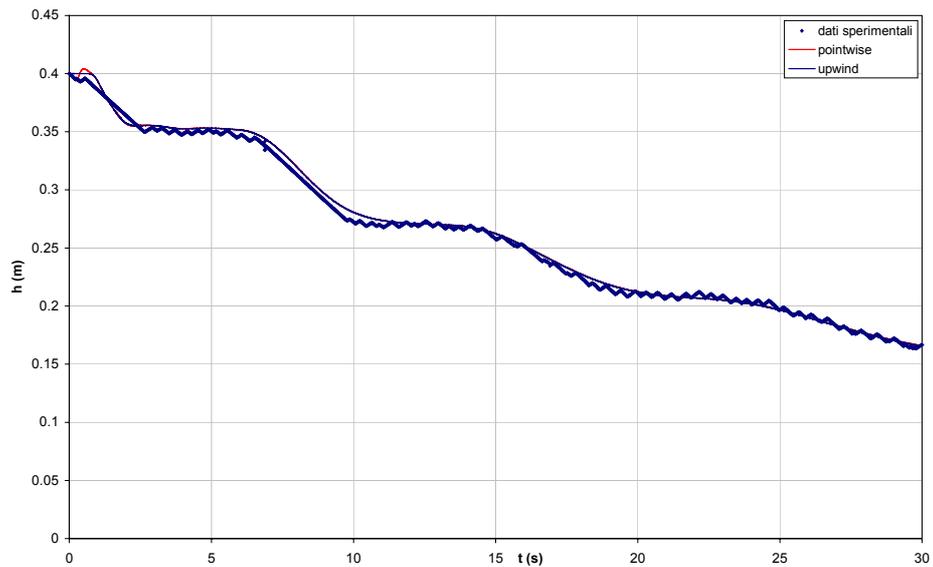


Figura 6.65f- Idrogramma dei livelli nella stazione G6

Le figure 6.65 a-e si riferiscono a stazioni di misura in prossimità dell'ostacolo, si vede come i due codici non riescano a riprodurre le oscillazioni che si riscontrano nell'esperienza sperimentale. Una discretizzazione di maggior dettaglio in corrispondenza dello stesso potrebbe migliorare notevolmente i risultati. La fig 6.65 b fa riferimento ad una stazione di misura dove si verifica un risalto idraulico. Il solutore del primo ordine è in grado di simularlo, anche se in anticipo. E' interessante notare come nella fig. 6.65 f, che si riferisce ad una stazione di misura all'interno del serbatoio, ci siano apprezzabili differenze tra le due scritture del termine sorgente nei primi istanti successivi all'apertura della paratoia. Il trattamento pointwise riproduce delle oscillazioni della quota di pelo liquido che sono dovute dal non bilanciamento tra le correzioni upwind dei flussi numerici e il termine sorgente. Il trattamento upwind invece riproduce il pelo liquido orizzontale. Questo può anche essere messo in evidenza dal campo delle velocità dopo 1 secondo di simulazione, quando la corrente non ha ancora raggiunto l'ostacolo nella seconda vasca. Il trattamento pointwise (Fig.

6.66b) produce portate che non si verificano nella realtà in corrispondenza dei due lati inclinati del canale che il trattamento upwind non riproduce (Fig 6.66a). Entrambe le figure 6.66 a e b si riferiscono al particolare dell'angolo in alto a sinistra del dominio considerato in figura 6.64.

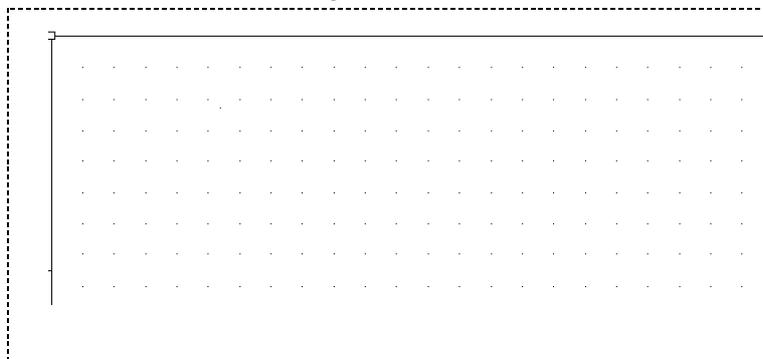


Figura 6.66a Particolare della mappa dei vettori velocità dopo 1 s dall'apertura della paratoia, upwind

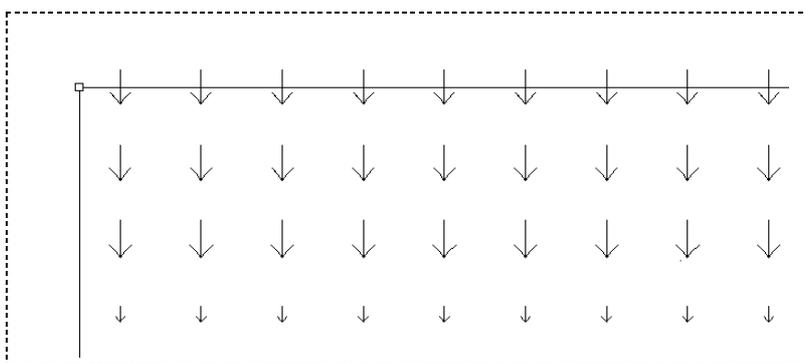


Figura 6.66b- Particolare della mappa dei vettori velocità dopo 1 s dall'apertura della paratoia, pointwise

Per capire meglio il fenomeno nelle figure 6.67a-d si riportano i confronti tra i campi delle velocità sperimentali e simulati a vari istanti di tempo, dopo 1, 2, 5 e 10 secondi dall'apertura della paratoia.

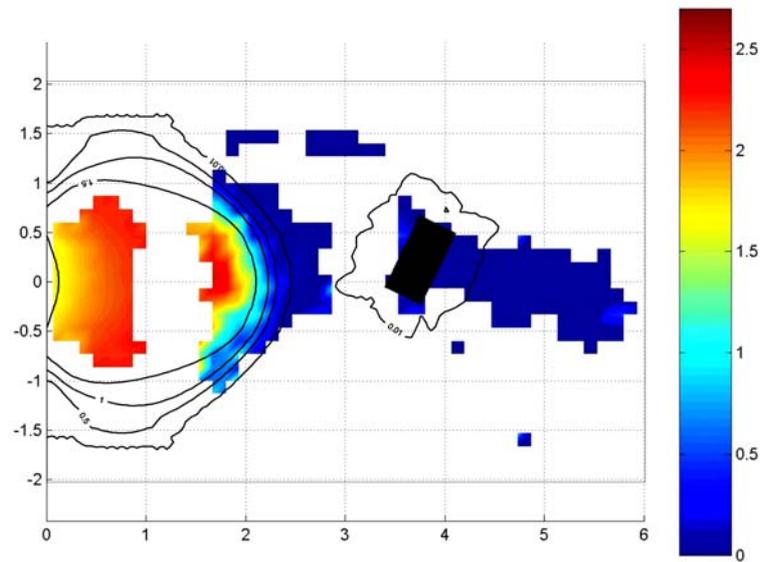


Fig 6.67a mappe simulate e sperimentali della norma del campo di velocità 1s

Dopo 1 s la corrente non ha ancora raggiunto l'edificio, il fenomeno risulta ancora simmetrico. La forma del campo delle velocità simulato è in accordo con quello osservato, anche se in leggero ritardo. A 2 s la corrente ha già raggiunto l'ostacolo, il fenomeno non è più simmetrico dopo 5 s si nota la riflessione contro le pareti laterali del canale, la zona di ristagno a valle dell'ostacolo stesso e le due zone di accelerazione in corrispondenza delle pareti laterali.

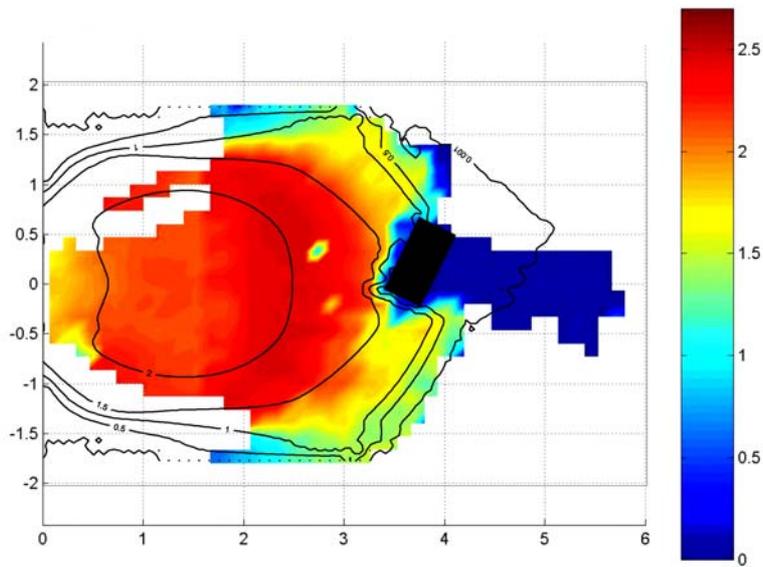


Fig 6.67b Mappe simulate e sperimentali della norma del campo di velocità 2 s

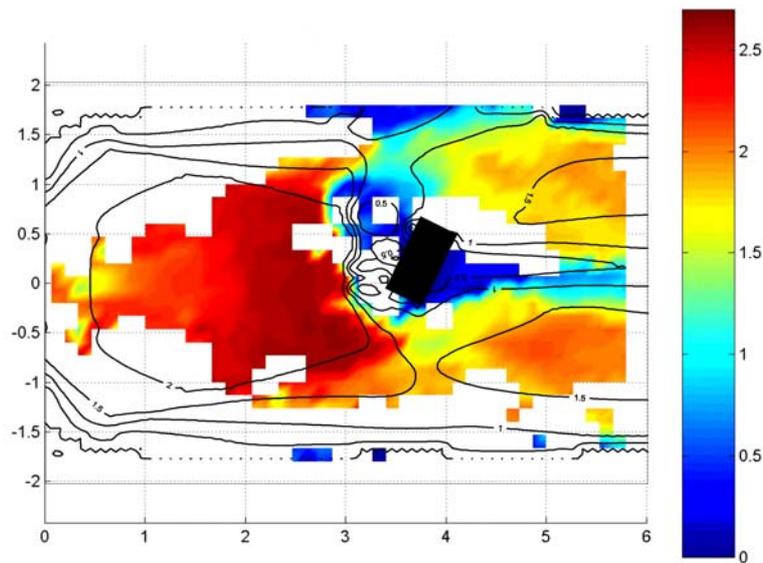


Fig 6.67c Mappe simulate e sperimentali della norma del campo di velocità 5 s

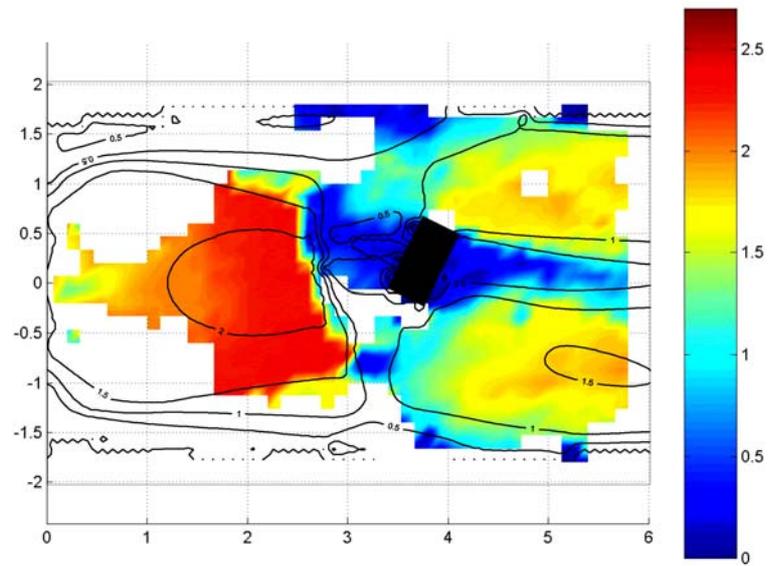


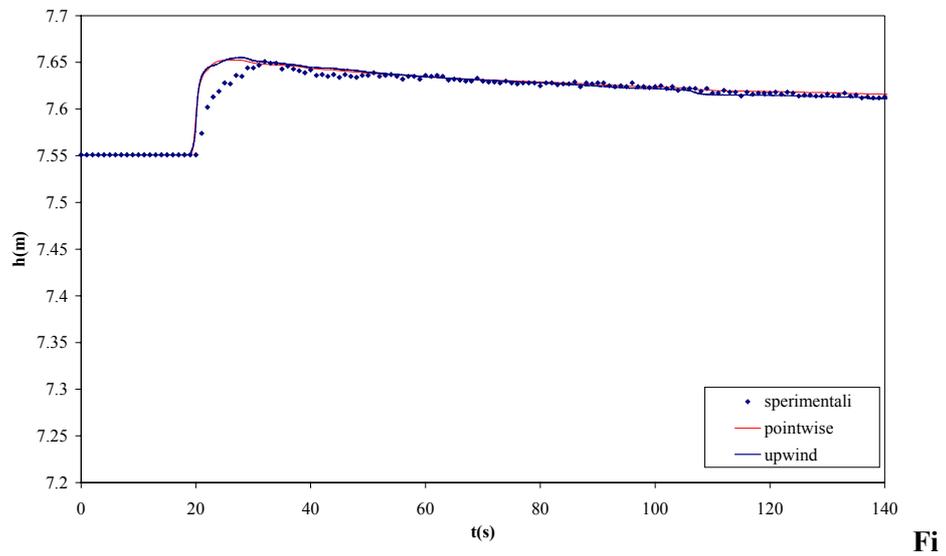
Fig 6.67d Mappe simulate e sperimentali della norma del campo di velocità 10 s

6.2.9. Evento di piena sul fiume Toce

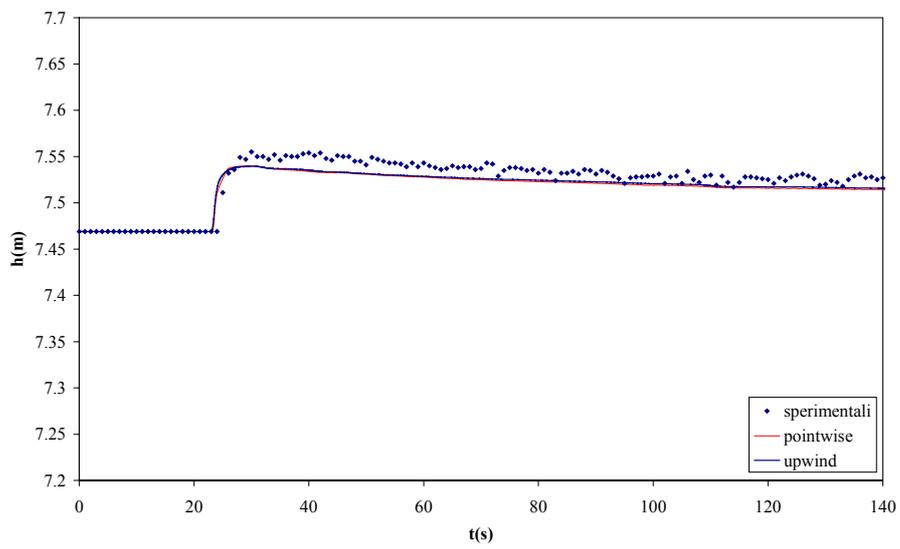
Il caso di studio è stato già illustrato nel paragrafo 6.1.4 in quanto simulato anche con il codice di calcolo monodimensionale. Questa applicazione risulta molto importante per verificare il trattamento del termine sorgente, in particolare modo la pendenza di fondo. Si sono quindi adottate le due schematizzazioni dei termini sorgente pointwise (4.3.1) ed upwind (4.3.2). Si sono simulati entrambi gli idrogrammi in ingresso H1 ed H2 (vedi fig 6.42)

Il dominio di calcolo è stato discretizzato in una maglia non strutturata di 15169 elementi rettangolari e triangolari, con una distanza media tra nodi di 15 cm. Le quote di fondo al centro degli elementi sono state interpolate linearmente a partire dalle quote del DTM fornito dall'ENEL. Il coefficiente di resistenza al moto utilizzato nelle simulazioni è stato, come per il caso monodimensionale, $0.0162 \text{ sm}^{-1/3}$.

Nelle figure che seguono si riportano i confronti tra idrogrammi misurati e calcolati in un certo numero di stazioni di misura e delle mappe dei vettori velocità a vari istanti di tempo, per entrambi gli idrogrammi in ingresso.



gura 6.68a- -Idrogramma dei livelli nella stazione P1-H1



gura 6..68b- -Idrogramma dei livelli nella stazione P4-H1

Fi

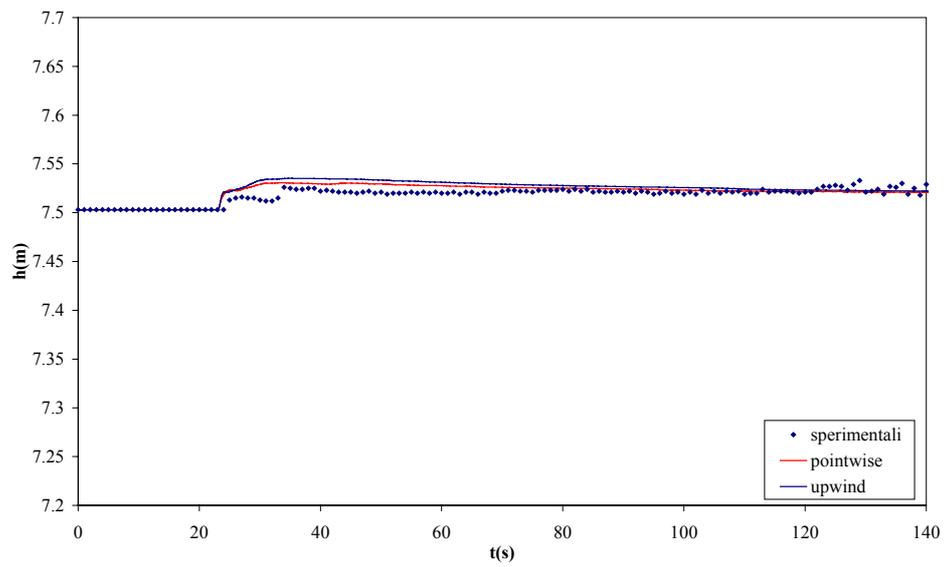


Figura 6.68c- -Idrogramma dei livelli nella stazione S6S-H1

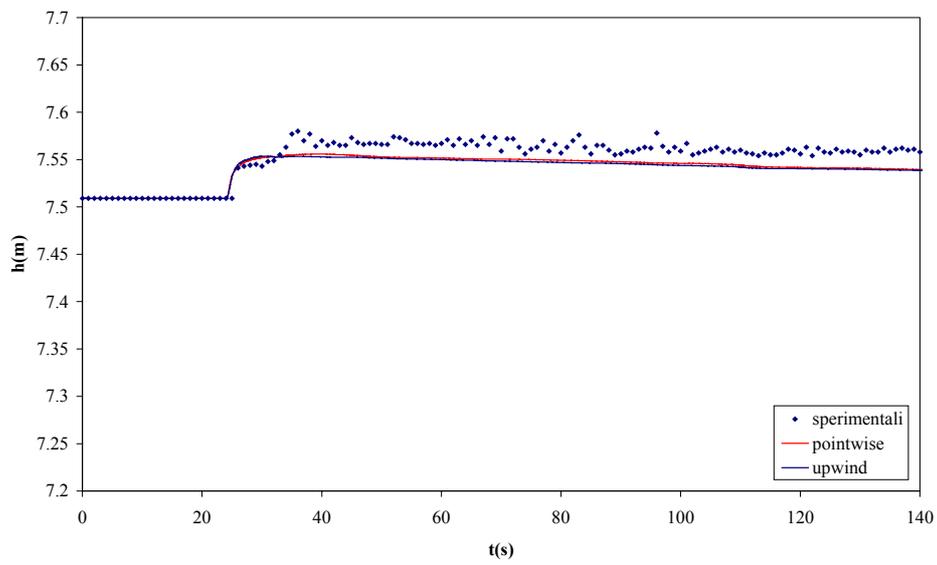


Figura 6.68d- -Idrogramma dei livelli nella stazione S6D-H1

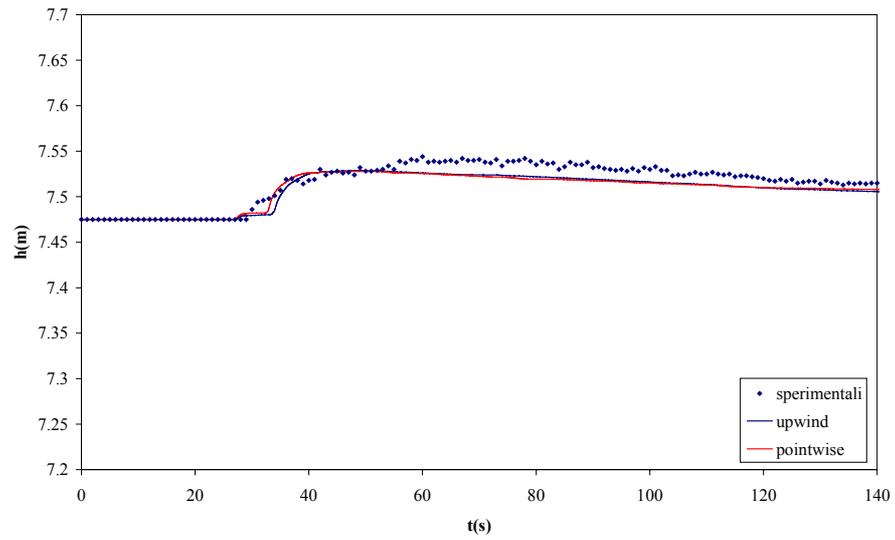


Figura 6.68e- -Idrogramma dei livelli nella stazione S8D-H1

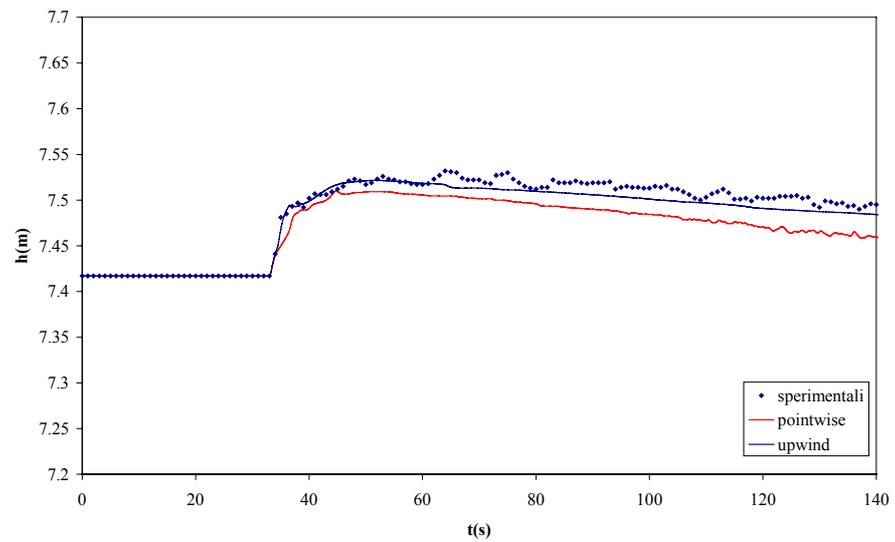
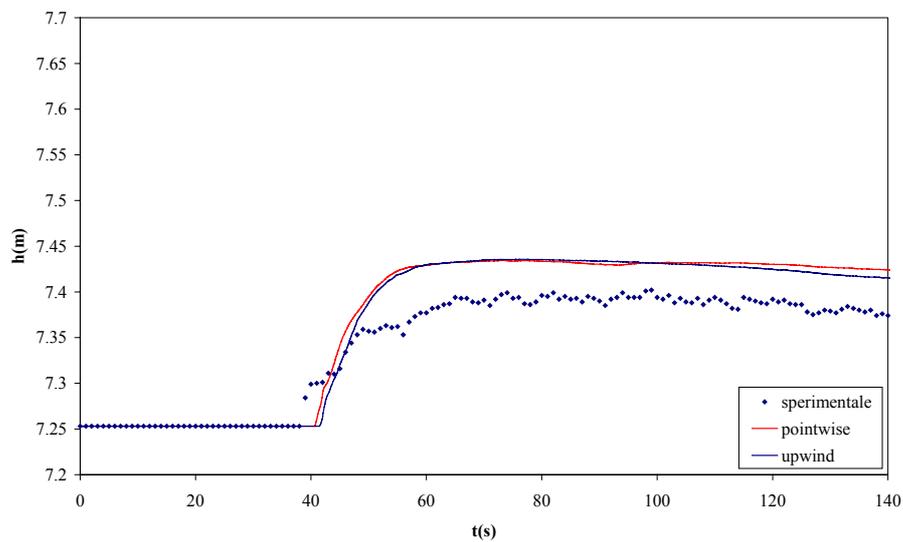


Figura 6.68f- -Idrogramma dei livelli nella stazione P9-H1



Fi

gura 6.68g- -Idrogramma dei livelli nella stazione P18-H1

Entrambi i trattamenti sorgente riescono a riprodurre correttamente la velocità del fronte (figure 6.68 a-g). Per quanto riguarda i livelli calcolati si nota

un buon accordo tranne che per le stazioni P9 e P18. Nella stazione P9 il trattamento upwind riproduce correttamente i valori osservati, mentre quello pointwise tende a sottostimarli. Per quanto riguarda la stazione P18 entrambi i trattamenti del termine sorgente commettono errori significativi sia nella celerità che nei valori max dei livelli calcolati. Una ragione potrebbe essere la presenza di un ponte nelle vicinanze della stazione di misura che non è stato considerato nelle simulazioni.

Nelle fig 6.69 a c si riportano le mappe dei vettori velocità a vari istanti di tempo per la simulazione caratterizzata dall'idrogramma H1. Si nota come l'onda simulata costeggi il deposito laterale situato in posizione centrale rispetto al modello senza superare l'argine ed allagare il deposito.

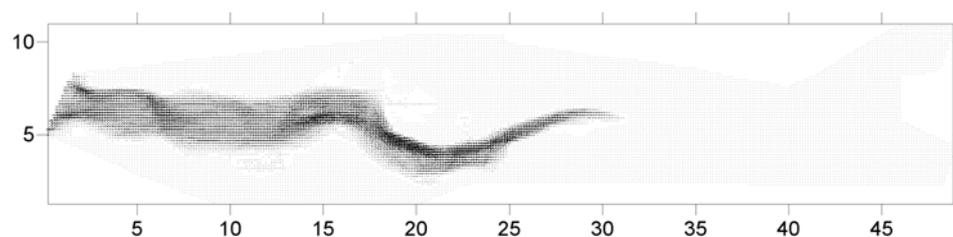


Figura 6.69a- -Mappe dei vettori velocità dopo 50 s di simulazione- H1

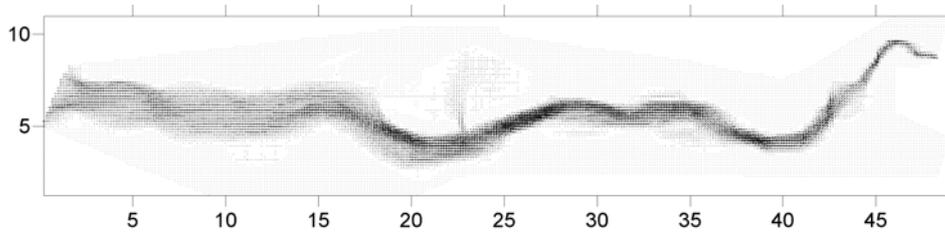


Figura 6.69b- -Mappe dei vettori velocità dopo 80 s di simulazione- H1

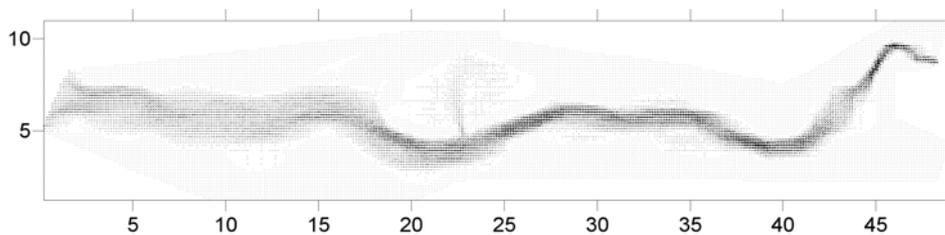


Figura 6.69c- -Mappe dei vettori velocità dopo 100 s di simulazione- H1

Si riportano ora i risultati per la simulazione caratterizzata dall'idrogramma in ingresso H2.

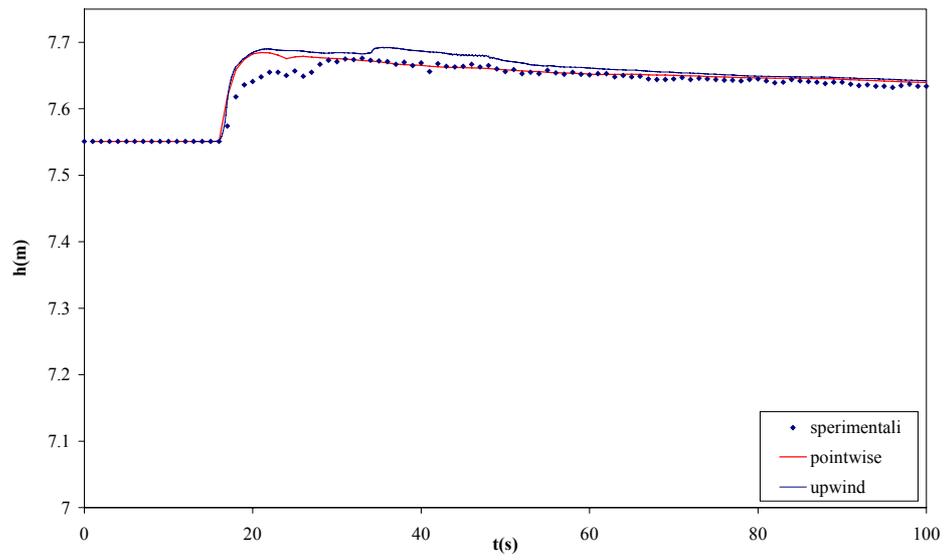


Figura 6.70a- -Idrogramma dei livelli nella stazione P1-H2

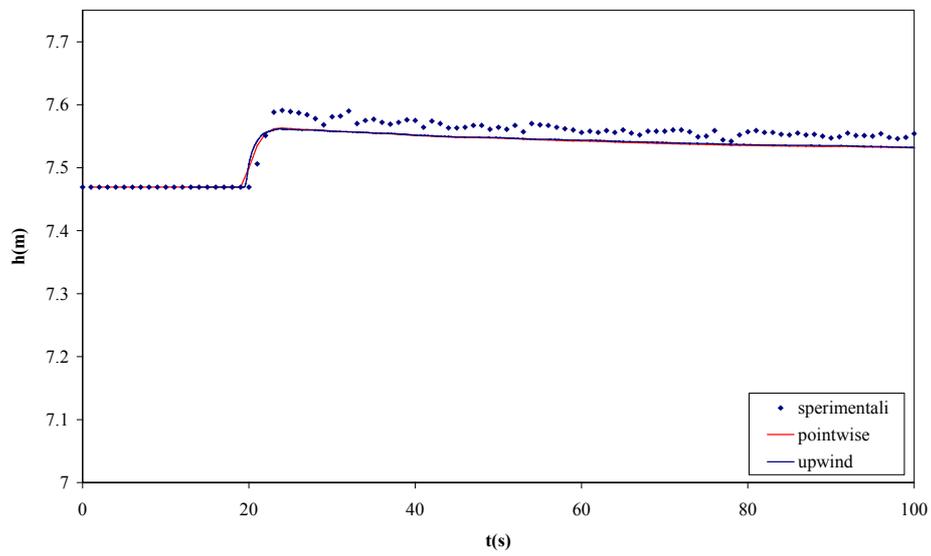


Figura 6.70b- -Idrogramma dei livelli nella stazione P4-H2

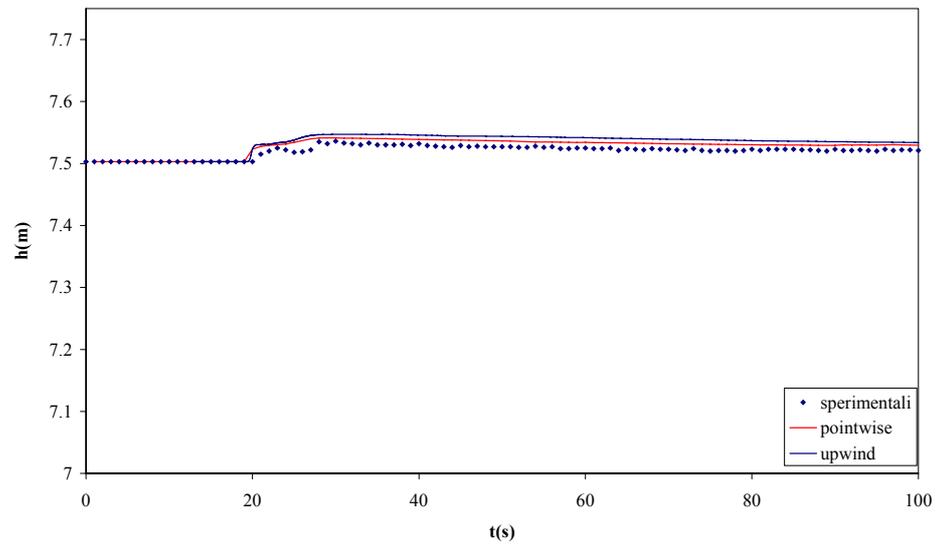


Figura 6.70c- -Idrogramma dei livelli nella stazione S6S-H2

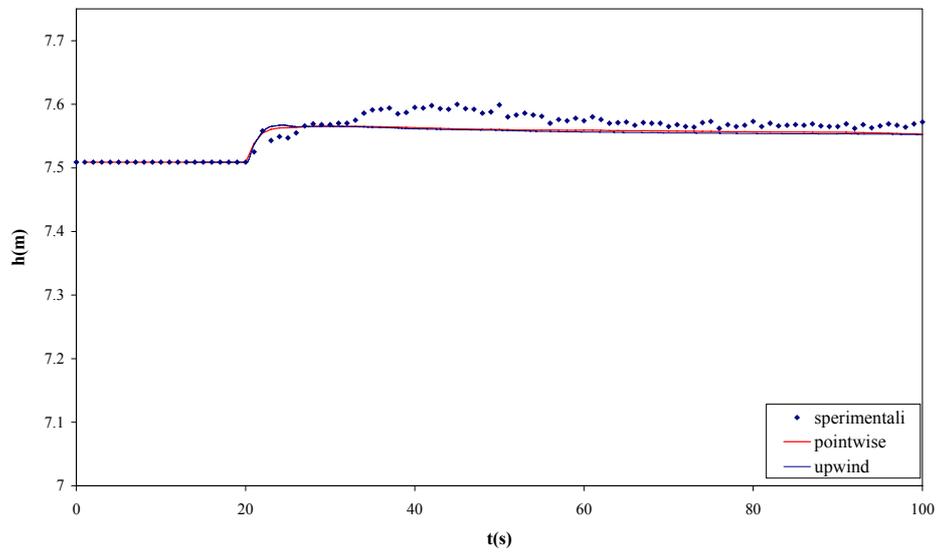


Figura 6.70d- -Idrogramma dei livelli nella stazione S6D-H2

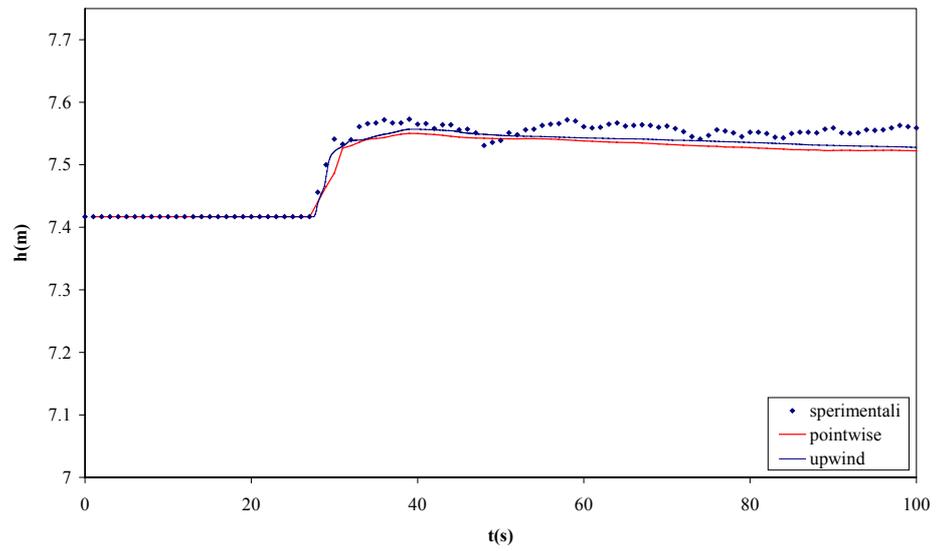


Figura 6.70e- -Idrogramma dei livelli nella stazione P9-H2

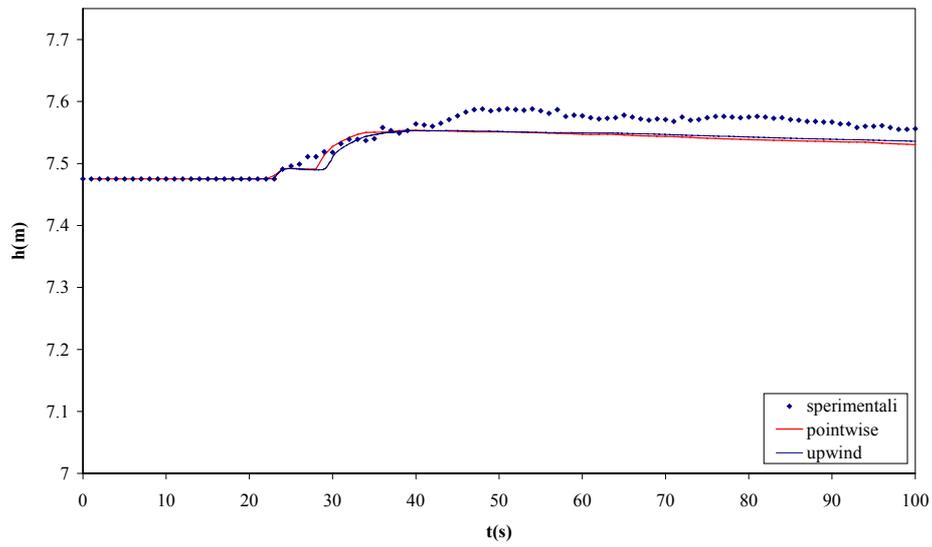


Figura 6.70f- -Idrogramma dei livelli nella stazione S8D-H2

Nella stazione P9 il trattamento upwind riproduce correttamente i valori osservati, mentre quello pointwise tende a sottostimarli. Nella stazione P18 entrambi i trattamenti del termine sorgente commettono errori significativi sia nella celerità che nei valori massimi dei livelli calcolati.

A titolo di esempio si riporta in figura 6.71 per una stazione di misura (P1) il confronto tra il codice monodimensionale e quello bidimensionale, entrambi ottenuti con il trattamento del termine sorgente upwind. Il codice 2D simula più correttamente l'arrivo dell'onda e anche il valore massimo raggiunto dai livelli nella sezione P1

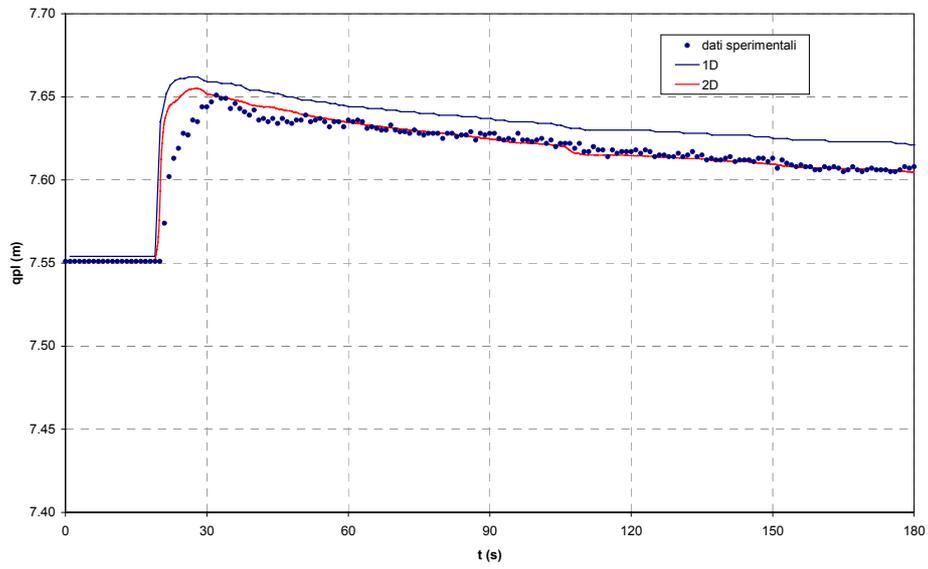


Figura 6.71- -Idrogramma dei livelli nella stazione P1-H1

Nelle fig. 6.72 a..h è mostrato il campo di velocità in vari istanti di simulazione considerando l'idrogramma H2 in ingresso. Si nota che l'idrogramma in ingresso è tale da consentire il superamento dell'argine e l'allagamento del deposito laterale, cosa che non avveniva per l'idrogramma H1.

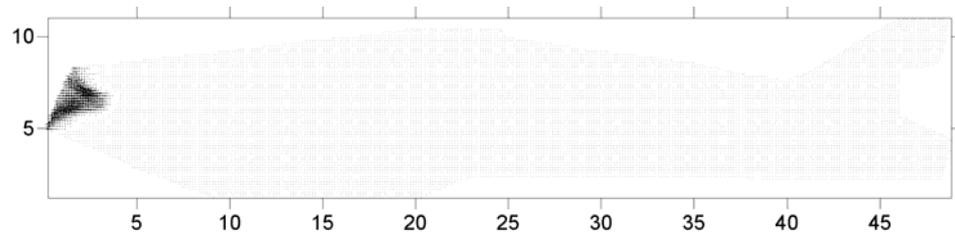


Figura 6.72a- -Mappe dei vettori velocità dopo 10 s di simulazione- H2

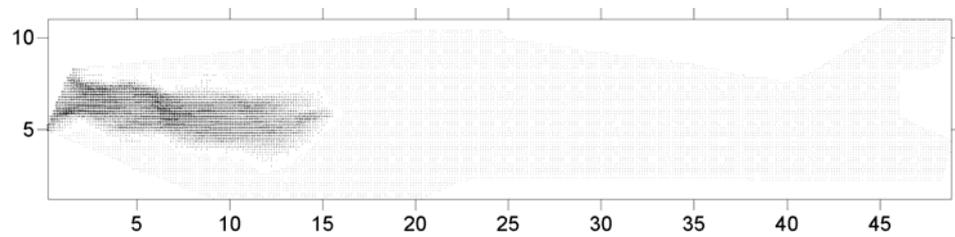


Figura 6.72b- -Mappe dei vettori velocità dopo 20 s di simulazione- H2

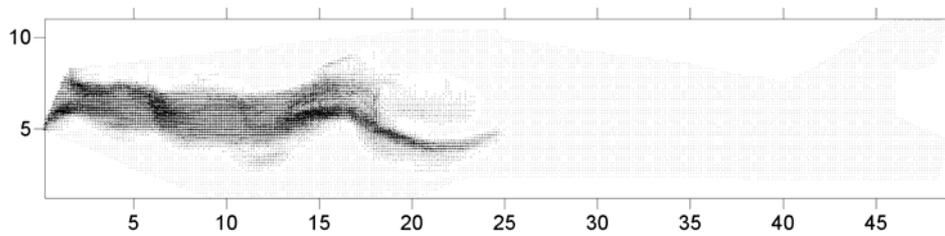


Figura 6.72c- -Mappe dei vettori velocità dopo 30 s di simulazione- H2

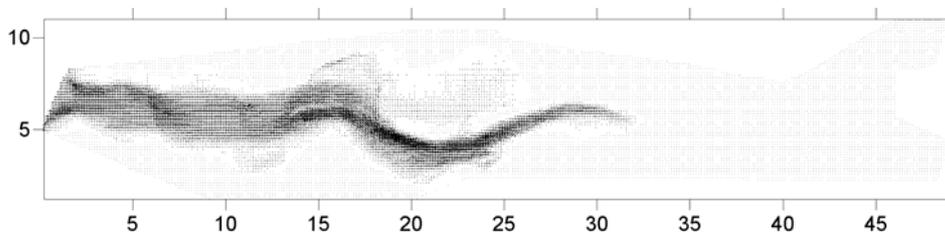


Figura 6.72d- -Mappe dei vettori velocità dopo 40 s di simulazione- H2

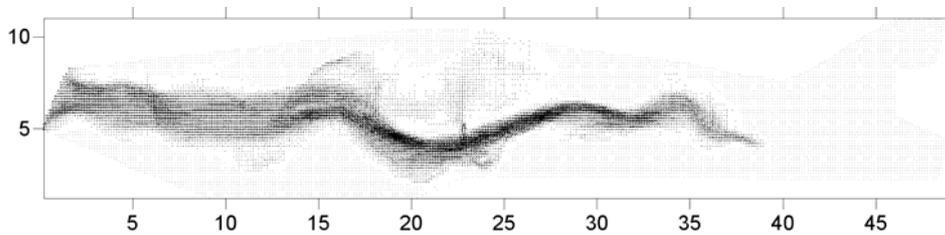


Figura 6.72e- -Mappe dei vettori velocità dopo 50 s di simulazione- H2

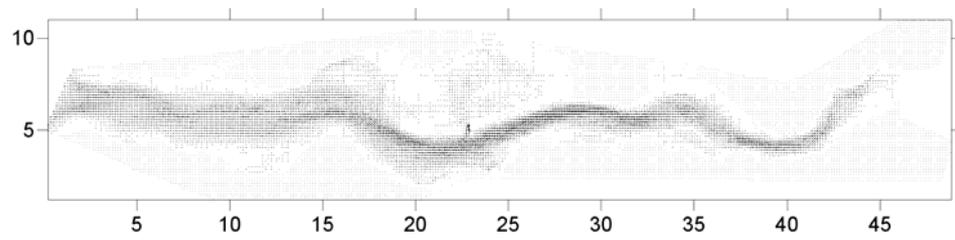


Figura 6.72- -Mappe dei vettori velocità dopo 60 s di simulazione- H2

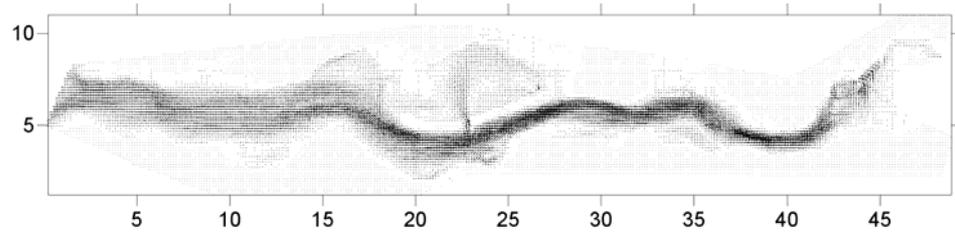


Figura 6.72g- -Mappe dei vettori velocità dopo 70 s di simulazione- H2

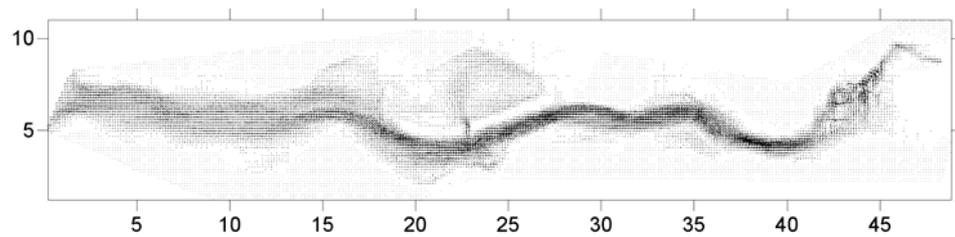


Figura 6.72h- -Mappe dei vettori velocità dopo 80 s di simulazione- H2

Capitolo 7

Interfaccia grafica O.R.S.A

7.1. Introduzione

Parallelamente alla realizzazione dei codici di calcolo per la propagazione di onde a fronte ripido l'attività di dottorato ha riguardato anche la realizzazione di un'interfaccia grafica in grado di agevolare l'uso del codice di calcolo. Questa attività si inquadra nella convenzione di ricerca tra l'ufficio Idraulica del servizio Nazionale Dighe e il Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale dell'Università di Pavia per la 'Realizzazione di codici di calcolo per la simulazione della propagazione e della espansione di onde di sommersione conseguenti a manovre volontarie o rottura di dighe'.

Il codice di calcolo è stato chiamato O.R.S.A (Onde di Rottura di Sbarramenti Artificiali)



Figura 7.1-Maschera iniziale

O.R.S.A. è articolato in sette sottosezioni che permettono di generare i file di input necessari al calcolo e la visualizzazione dei risultati da esso ottenuti.

L'interfaccia grafica si articola nei seguenti moduli :

- Gestione della Topografia
- Caratterizzazione delle simulazioni
- Condizioni al contorno
- Condizioni iniziali
- Simulazione del deflusso in corrispondenza dei manufatti
- Calcolo
- Risultati

Dopo una breve descrizione dei moduli sopra richiamati verranno nel seguito descritte quelle funzionalità, originali a conoscenza della scrivente, utili per la

gestione delle informazioni topografiche e la perimetrazione in automatico delle aree inondabili

7.2. Modulo di gestione e acquisizione della topografia

Questo modulo consente di acquisire e gestire le informazioni topografiche, sia importandole da file che inserendole ex novo. Permette di simulare sezioni di forma qualsiasi assegnate per punti con coefficiente di resistenza al moto variabile sulla sezione

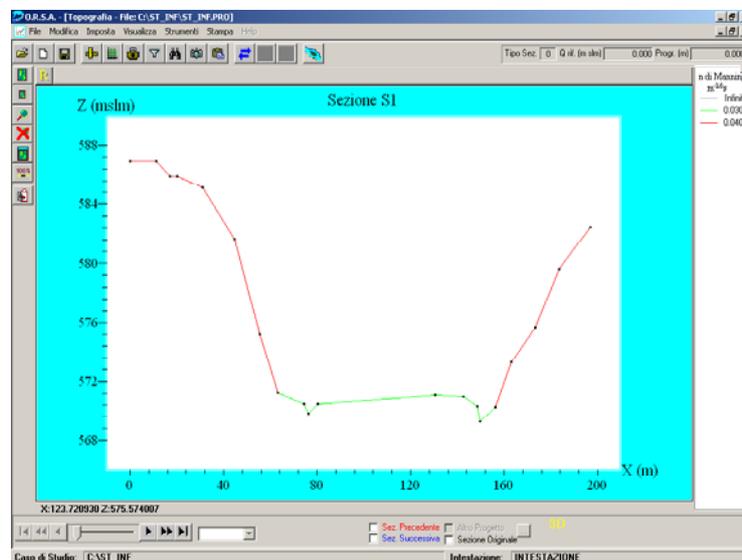


Figura 7.2-Sezione trasversale

E' in grado inoltre di simulare le perdite di carico attraverso un ponte simulando deflusso a superficie libera, in pressione, sormonto oltre l'impalcato (vedi fig 7.3)

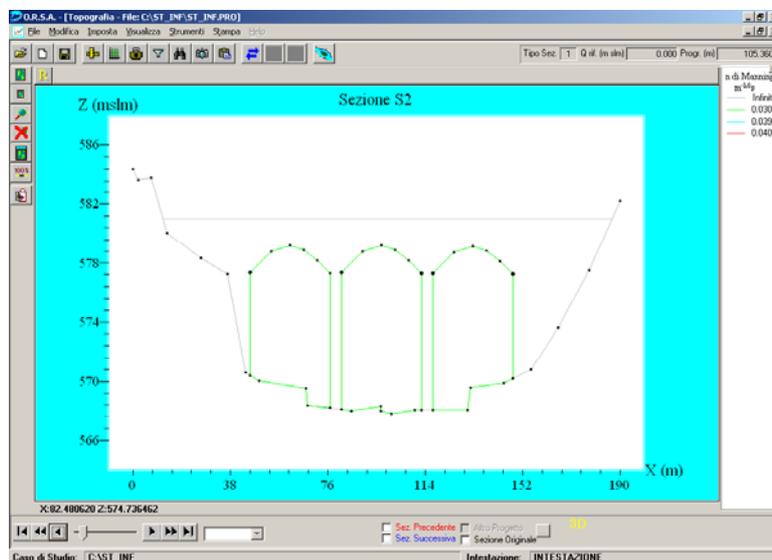


Figura 7.3- Sezione trasversale in corrispondenza di un ponte

L'interfaccia grafica consente di importare planimetrie su basi *raster* nei più comuni formati (TIF, GIF, JPG) (vedi fig 7.4) sulle quali georeferenziare il tracciato planimetrico del corso d'acqua e la traccia delle sezioni trasversali. Consente inoltre di realizzare ovvero gestire un modello digitale del terreno qualora si disponga di informazioni topografiche di maggior dettaglio. In particolare, qualora siano note le coordinate tridimensionali dei punti delle sezioni e del fondo valle, ORSA permette di creare *DTM* di maglia regolare su domini di forma qualsiasi (delimitati dall'utente). Sul modello digitale del terreno possono essere identificate altre entità (ostacoli, argini) che limitano l'espansione della corrente.

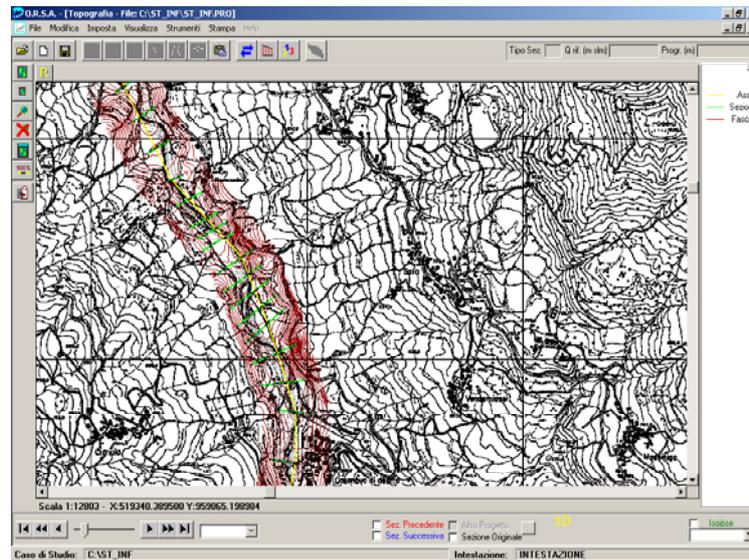


Figura 7.4- Visualizzazione del DTM

Nelle applicazioni a casi reali, molto frequentemente le sezioni trasversali non sono congruenti altimetricamente con il DTM. Questa discordanza ha grande rilevanza e deve quindi essere corretta per evitare incongruenze nella perimetrazione. E' stata quindi inserita una funzionalità che permette la modifica di punti del DTM in modo tale da ristabilire la congruenza con il rilievo topografico. O.R.S.A determina una statistica di quanto le sezioni ricavate dal DTM si scostano da quelle rilevate, ed è possibile andare a modificare solo quelle che hanno uno scostamento maggiore di quello accettabile (vedi fig. 7.5)

Modifica quote punti DEM				
Filtra sezioni per:				
	<input checked="" type="radio"/> Progressiva	<input type="radio"/> Delta Max neg	<input type="radio"/> Delta Max pos	<input type="radio"/> Sqm
Sezione	Progressiva	Delta max neg.	Delta max pos.	Sqm
S4	471.240	-0.879	0.890	-0.076
S5	544.870	-1.030	1.298	-0.197
S6	573.970	-1.828	1.228	-0.509
S7	666.240	-1.287	1.432	-0.050
S8	830.720	-1.412	3.189	0.099
S9	1058.290	-0.923	1.811	0.257
S10	1477.550	-0.817	1.483	-0.051

Figura 7.5-Maschera di valutazione delle statistiche

Modificando la quota di uno o di due punti della griglia del DTM si riporta il modello digitale del terreno sul rilievo topografico, come si può vedere nella figura 7.6

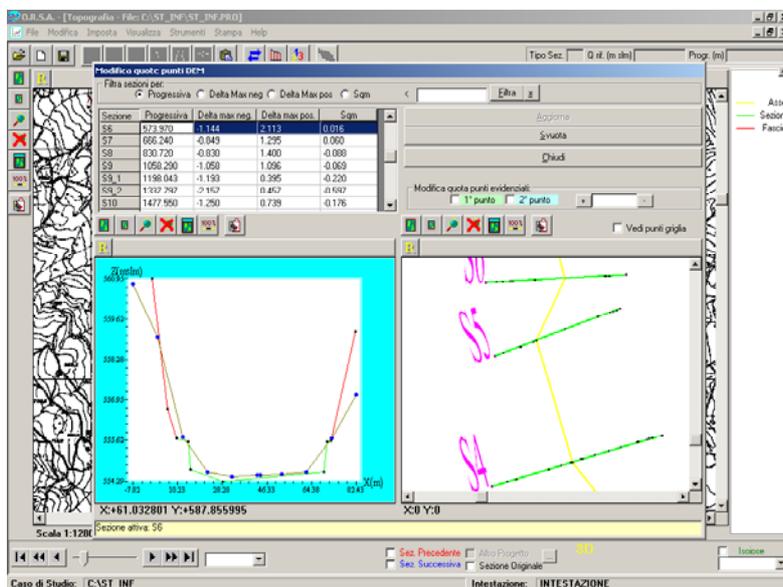


Figura 7.6- Maschera per la modifica dei punti del DTM

In questo modo è poi possibile perimetrare in modo corretto l'area inondabile, come sarà descritto più in seguito.

O.R.S.A. è dotato delle funzionalità standard come la stampa delle sezioni trasversali, del profilo longitudinale o della planimetria del caso di studio in esame, sia su file dxf che su carta.

7.3. Caratterizzazione delle simulazioni

Permette di impostare tutti i parametri del calcolo, come il tempo di simulazione, la scansione di archiviazione dei risultati, ed un certo numero di parametri necessari al codice calcolo

7.4. Definizione delle condizioni idrauliche

Permette di impostare le condizioni iniziali, imponendo a monte l'idrogramma delle portate in ingresso e a scelta il numero di Froude della prima sezione di calcolo ovvero una scala di deflusso, e a valle a scelta varie condizioni al contorno, inclusa quella di riflessione

7.5. Condizioni iniziali

E' possibile eseguire una simulazione partendo da fondo asciutto o da una precedente elaborazione del codice di calcolo (ripartenza a caldo). *ORSA* permette inoltre di effettuare una simulazione a partire da preesistenti condizioni di moto stazionario.

7.6. Simulazione del deflusso in corrispondenza dei manufatti

Questo modulo viene utilizzato nel caso in cui nel tratto di alveo preso in esame ci siano delle singolarità idrauliche come ponti, paratoie, o generici restringimenti dell'alveo. Con un programma apposito si determinano le scale di deflusso in moto permanente attraverso la discontinuità, da utilizzarsi nel calcolo in moto vario, come si è già accennato nel paragrafo delle condizioni al contorno interne, disconnettendo dal dominio del calcolo le sezioni a monte e a valle della singolarità stessa.

7.7. Visualizzazione dei risultati

Permette di visualizzare le variazioni delle quote di pelo liquido e del carico totale nelle sezioni trasversali (vedi fig 7.8). Sono inoltre visualizzabili nei vari istanti di tempo i valori delle principali grandezze idrauliche quali portata, velocità media della corrente, numero di Froude, sforzo di trascinamento medio, spinta totale, unitamente ai valori involuppo. Lo stesso è possibile se si visualizza il profilo longitudinale.

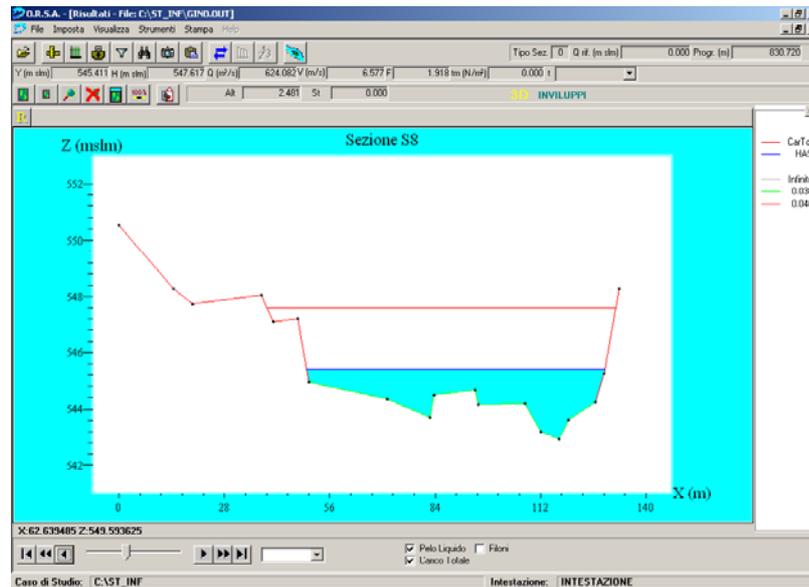


Figura 7.7-Visualizzazione della sezione trasversale

Una volta predisposto il *DTM*, che può comunque essere creato con *software* specialistici (ARC-INFO, ARC-VIEW, SURFER, SPYGLASS) e agevolmente importato in *ORSA*, l'interfaccia perimetra in automatico (per geometrie 3D) le aree inondabili intersecando i profili di pelo liquido calcolati con il *DTM* (vedi fig 7.8).

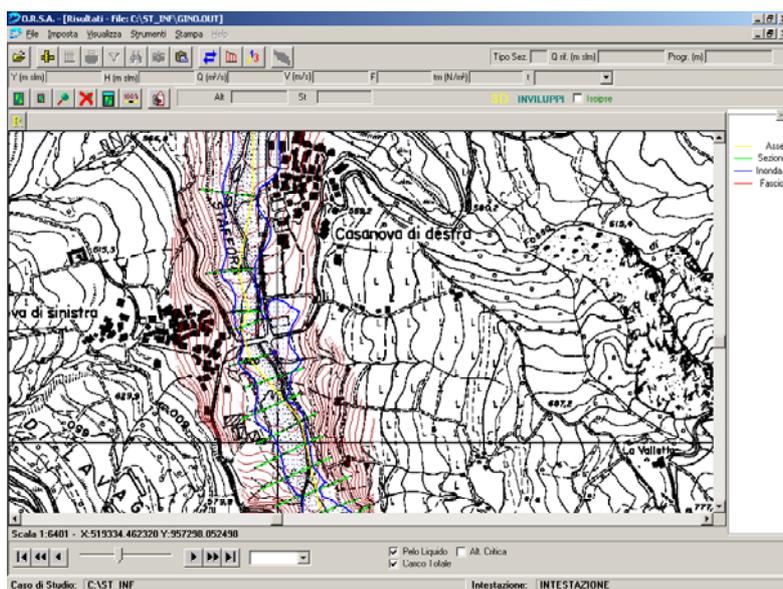


Figura 7.8- Perimetrazione in automatico delle aree di esondazione.

Nel caso in cui il file in esame non sia 3D l'interfaccia è in grado ugualmente di eseguire la perimetrazione semplicemente collegando con dei segmenti l'ingombro del pelo liquido calcolato per ogni sezione trasversale.

E' importante notare che per interpolare la superficie libera vengono usate superfici rigate, in modo tale da ristabilire su ciascuna sezione trasversale il pelo liquido orizzontale. Nei pacchetti commerciali standard (HEC RAS) le interpolazioni vengono fatte tramite triangolazioni, questo determina pelo liquido non orizzontale sulle sezioni trasversali.

Tutte le grandezze visualizzate sono stampabili sia su supporto cartaceo sia su file *dxf*.

Conclusioni

Durante l'attività svolta nell'ambito del dottorato due codici di calcolo mono e bidimensionali ai volumi finiti sono stati sviluppati per la propagazione di onde a fronte ripido causate dall'ipotetico collasso di opere di sbarramento. Il modello matematico di partenza, oramai riconosciuto dalla comunità scientifica internazionale, è quello delle Shallow Water Equations. Si è scelto di discretizzare le equazioni per mezzo di solutori numerici di tipo upwind, che inglobano le discontinuità presenti nel campo di moto e tengono conto della loro direzione di propagazione. Si è indagato l'effetto di solutori aventi accuratezza diversa, non solo nella riproduzione delle soluzioni analitiche, ma anche nell'applicazione ad un gran numero di prove sperimentali presenti in letteratura. Da questo tipo di analisi si è concluso che l'onerosità computazionale di solutori del secondo ordine di accuratezza non è giustificato nell'applicazione a geometrie variabili, con presenza di contropendenze, ostacoli nel campo di moto. Si è quindi indagata l'importanza del trattamento del termine sorgente. Esso ricopre un ruolo fondamentale, soprattutto nell'ottica dell'applicazione del solutore numerico a problemi reali, dove la variazione di pendenza di fondo, le resistenze al moto variabili lungo l'alveo possono influenzare molto la propagazione. Il trattamento dei termini sorgente risulta molto importante perché lo schema di Roe provoca uno sbilanciamento tra correzioni upwind del vettore dei flussi e discretizzazione del termine sorgente. Questo è causato dalla presenza degli autovalori della matrice Jacobiana del flusso. Si è allora implementato il trattamento proposto da Nuijc e quello upwind trovando buoni risultati. Nelle applicazioni del codice

monodimensionale a geometrie con variazioni molto brusche di sezione trasversale si è appurato che il trattamento upwind non è in grado di simulare correttamente il deflusso attraverso strettoie molto pronunciate. Si sono allora inserite delle condizioni al contorno interne disconnettendo il dominio di calcolo a cavallo della strettoia e utilizzando una scala di deflusso in moto permanente che tenesse conto delle perdite di carico attraverso la stessa. Per studiare meglio questo fenomeno è stata eseguita una campagna di prove sperimentali presso il Laboratorio di Ingegneria Idraulica e Ambientale dell'Università di Pavia simulando il deflusso attraverso una strettoia ed una serie di paratoie. Il confronto con i dati sperimentali, tranne per i primi istanti in cui la corrente impatta contro l'ostacolo, dove le accelerazioni verticali non sono trascurabili e c'è molta aria inglobata nella corrente, è stato buono. Un ulteriore sviluppo in questa direzione sarà la simulazione del moto della corrente attraverso un ponte.

A seguito dell'analisi esaustiva condotta per il codice monodimensionale si è scelto di implementare il solutore numerico di Roe per il codice di calcolo bidimensionale. Molta attenzione è stata posta anche in questo caso al trattamento dei termini sorgente, ed il codice è stato testato in un gran numero di prove sperimentali presenti in letteratura. In questo caso ulteriori sforzi dovranno essere fatti per formulare un trattamento sorgente upwind che soddisfi sia all'equazione di bilancio di massa che a quella di quantità di moto. Si è per ultimo introdotto nel modello matematico il termine legato allo sforzo di Reynolds per simulare il distacco della corrente dalle pareti del canale nel caso di repentini cambi di direzione del canale, come la presenza di gomiti, di tratti a 90 gradi. La simulazione di prove sperimentali di questo tipo ha verificato la formazione di vortici nel campo di moto.

Come ultimo test si sono applicati entrambi i codici implementati per simulare la propagazione di un'onda di piena in un tratto di 5 km del fiume Toce che scorre nelle Alpi. Entrambi i codici hanno dati buoni risultati, confrontabili con quelli ottenuti all'interno del progetto Europeo CADAM.

Un ulteriore sviluppo della tesi potrebbe vedere l'accoppiamento del codice mono e bidimensionale.

Bibliografia

1. Abbot M.B (1979). *Computational Hydraulics*, London. Pitman Publishing limited.
2. Alcrudo F. 'State of the Art review on Flood Propagation ' Atti della prima riunione del progetto IMPACT , Wallingford 16-17 Maggio 2002
3. Alcrudo F., Garcia Navarro P.(1993).“A high resolution Godunov type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equation”; *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol 16, 489-505
4. Alcrudo F.,Garcia Navarro P., Saviron J.M. (1992). ”Flux difference splitting for 1D open channel flow equation”; *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol 14,1009-1018
5. Alcrudo F.,Garcia Navarro P., Saviron J.M.(1992). ”1-D open channel flow simulation using TVD-Mc Cormack scheme”, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol 118 n 10.1359,1371
6. Alcrudo F.,Garcia Navarro P.(1992).”High resolution 1D schemes for unsteady open channel flow simulation”, *Jornadas de encuentro trilateral para el estudio de la hidraulica de las ondas de submersion*, Saragoza, 10-11 Settembre, 1-14

7. Alcrudo F.S.(1992). *Esquemaz de alta resolucioin de variacioin total decretiente para el estudio de flujos discontinuos de superficie libre*; Memoria de Tesis Doctoral presentada en la facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza.
8. Alcrudo F.S.(2002). 'A state of the art review on mathematical modelling of flood propogation', IMPACT, 2nd Project Workshop CD-ROM proceedings, Mo-I-Rana, Norway, September 2002
9. Anastasiou K., Chan C.T. (1997). 'Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes ', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol 24, 1225-1245
10. Aureli F., Mignosa P., Tomirotti M (1999). "Dam-break flow in presence of abrupt bottom variation", *Proc. of 28th IAHR Congress Hydraulic Engineering for Sustainable Water Resources Management at the Turn of the Millennium*, Graz,
11. Aureli F., Belicchi M., Maione P., Mignosa P., Tomirotti M.(1998). "Fenomeni di moto vario conseguenti al crollo di opere di ritenuta II Indagini sperimentali e modellazione numerica in presenza di onde di shock", *L'Acqua*, vol 5, 29-41
12. Aureli F., Mignosa P., Tomirotti M.(2000). "Numerical simulation and experimental verification of Dam-Break flows with shocks", *Journal of Hydraulic Research*, vol 38, n 3, 197-206
13. Barnes A.H., Su S.T.(1970). "Geometric and frictional effects on sudden releases" *Journal of the Hydraulics Division*, A.S.C.E.

14. Bellos C.V., Soulis J.V, Sakkas J.G.(1992). "Experimental investigation of two dimensional dam-break induced flows", *Journal of Hydraulic Research*, vol 30 n 1: 47-63
15. Bento Franco A. Betamio de Almeida A. (2000)'Dam-break in a channel with a non-symmetrical floodplain' *Cadam Proceedings*
16. Bermudez A.,Dervieux A., Desideri J.A., Vasquez M.E.(1998). "Upwind schemes for the two dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol 155, 49-72
17. Bermudez A., Vasquez M.E.(1994)."Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms", *Computers & Fluids*, vol 23 n 8, 1049-1071
18. Brufau P, Garcia Navarro P.(2000). "Two dimensional dam break flow simulation", *International Journal for numerical methods in fluids*, vol 33, 35-57
19. Brufau P., Vasquez-Cendon M. E., Garcia Navarro P.(2002):"A numerical model for the flooding and drying of irregular domain", *International Journal for numerical methods in fluids*, vol 39, 247-275
20. Brufau P., A.,Vasquez-Cendon M. E., Garcia Navarro P,Mendez A., Puertas J.(2002):'Numerical model validation with experimental data on dam break problems involving wetting/drying fronts over initially dry bed adverse slopes' *Proceedings RiverFolw 2002*, vol 1,487-494
21. Brufau P.(2000):'Simulacion bidimensional de flujos hidrodinamicos transitorios en geometrias irregulares' Memoria de Tesis Doctoral presentada en la facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza

22. Cetina M., Rajar (1994) R. 'Two Dimensional Dam Break Flow simulation in a sudden enlargement', Proceedings of the conference on Modelling of flood propagation over initially dry area, Milano 1994
23. Chen C.I.(1980) 'Laboratory verification of a dam-Break flood model', *ASCE Journal of the Hydraulic division*, vol 106, 535-556
24. Chevret A., Dalleves P. (1970) : "Calcul de l'onde de submersion consecutive a la rupture d'un barrage", *Schweizerische Bauzeitung, Vol 88*: 420-432
25. Cunge J.A., Holly F.M., Verwey A.(1980) *Practical Aspects of computational river Hydraulics*, Pitman Advanced Publishing Program.
26. Delis A.I., Skeels C.P., Ryrie S.C. (2000) "Implicit high resolution methods for modelling one dimensional open channel flow", *Journal of Hydraulic research*, vol 38 n 5, 369,382
27. Dodd N.(1998). " Numerical Model of wave run up, overtopping, and regeneration", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean engineering*, vol124, n 2, 73,81
28. Faure J., Nahas N. (1961). " Etude numerique et experimentale d'intumescences a forte courbure du front", *La Houille Blance* vol 5: 576-587
29. Fennema R.J., Chaudry M.H.(1990). 'Explicit methods for two dimensional transient free surface flows' *Journal of Hydraulic Reserach* vol 116 n 8, 1013-1034

-
30. Fraccarollo L., Toro E.F.(1994). '*Experimental and computational analysis for two dimensional Dam.Break type problems*' Quaderni del Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale dell'Università degli studi di Trento
 31. Fraccarollo L., Toro E.F.(1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two dimensional dam-break type problems", *Journal of Hydraulic research*, vol 33 n 6, 843-864.
 32. Fugazza M (1993). "Simulazione del moto vario nelle correnti a superficie libera con discontinuità e cambiamenti di regime", *Idrotecnica*, vol 1., 9,16
 33. Gallati M., Braschi G.(1994), "On the simulation of the waves produced by dam break and landslide fall" *Int. Workshop on Floods and Inundations related to Large Earth Movements*, Trento
 34. Garcia Navarro P., Vasquez Cendon M.E.(2000), "On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations", *Computers & Fluids*, vol 29, 951-979
 35. Garcia Navarro P., Fras A., Villanueva I.(1999). "Dam-break flow simulation: some results for one dimensional models of real cases", *Journal of Hydrology*, vol 216, 227-247
 36. Glaister P.(1998): "Approximate Reimann solution of the shalllow water equation.", *Journal of Hydraulic Research*, vol 26 n 3, 293-306
 37. Harten A.(1983). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *Journal of computational physics*, vol 49, 357-393.
 38. Heniche M., Secretan Y., Boudreau P., Leclerc M (2000): "A two dimensional finite element drying wetting shallow water model for rivers and estuaries", *Advances in Water Resources*, vol 23, 359-372

39. Hirsh C.(1992). "Numerical computation of internal and external flows", John Wiley&Sons, 1,2, Chicester,1992
40. Hiver J.M.(2000)'Dam-break in a channel with a non symmetrical flood plain', CADAM proceedings
41. Hubbard M. E., Garcia Navarro P. (2000)."Flux difference Splitting and the balancing of source terms and flux gradients", *Journal of Computational Physics*, vol 165, 89-125.
42. Hseng Tseng M., Chu Chia R.(2000)."The simulation of dam break flows by an improved predictor corrector TVD scheme", *Advances in Water Resources*, vol 23, 637-643
43. Jha A.K., Akiyama J., Ura M.(1995)."First-and second-order flux difference splitting schemes for dam-break problems", *Journal of Hydraulic Engineering*, vol 121 n 12: 877-884
44. Klonids A.J., Soulis J.V.(2001). "An implicit scheme for steady two-dimensional free-surface flow calculation", *Journal of Hydraulic Research*, vol 39 n 4, 393,402
45. Lauber G., Hager W.(1998): "Experiments to dambreak wave: horizontal channel", *Journal of Hydraulic Research*, vol 36 n 3, 291-307
46. Liska R., Wendroff B.(1999)."Two-Dimensional shallow water equations by composite schemes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol 30, 461-479

47. Manciola P.G., Mazzoni A., Savi F.(1994). "Formation and propagation of Steep waves: an Investigative Experimental Interpretation", Modelling of flood propagation over initially dry areas, ASCE, Milan, 283-297
48. Mahmood K., Yevjevich V.(1975). "Unsteady flow in open channel", Water Resources publications, I, Colorado, 1975.
49. Mohapatra P.K, Bhallamudi S.M.(1996):"Computation of a dam-break flood wave in channel transitions", Technical note, *Advances in Water Resources*, vol 19 n 3: 181-187
50. Montuori C.(1964). "Immissione di una portata costante in un canale vuoto", (in Italian), *Atti della Fondazione politecnica per il mezzogiorno d'Italia*, vol VI: 3-59
51. Morris M.W.(2000):"CADAM Concerted Action on Dambreak Modelling, Final Report", Report SR 571, Wallingford,
52. Morris M.W, Galland, J.C.(2000). "CADAM Concerted Action on Dambreak Modelling, Dambreak Modelling Guidelines & Best Practice", Report SR 571, Wallingford.
53. Natale L, Savi F. (1992). "Propagazione di onde di sommersione in un canale vuoto", Proc. of Jornadas de Encuentro Trilateral para el estudio de la idraulica de las ondas de submersion, Zaragoza: 46-77
54. Natale L, Nettuno L, Savi. F.(1996) "Comparison among finite difference schemes for the integration of shallow water equation", *Proc. of the IASTED/ISMM International Conference on Modelling and Simulation*, Pittsburgh

55. Nsom B. , Debiane K., Piau J.M.(2000).”Bed slope effect on the dam break problem, *Journal of Hydraulic Research*, vol 38 n 6, 459-464
56. Nujic M.(1995).”Efficient implementation of non oscillatory schemes for the computation of free surface flows”, *Journal of Hydraulics research* , vol 33 n 1, 101-111.
57. Paquier A. (2000):’ Computations performed by CEMAGREF on the Malpasset test case”, CADAM, 4th Project Workshop CD-ROM Proceedings, Zaragoza Meeting,18 -19 November 1999
58. Petaccia G. , Savi F.(2001). “Comparison between first and second order finite volumes schemes to simulate dam-break waves”, *International conference on conflict assessment & resolution for reservoir systems*,Wien, In press
59. Petaccia G., Savi F. (2001): ”Mathematical simulation of laboratory dam-break waves with shocks”, *Proceedings of the Applied Simulation and Modelling ASM*, 4-7 September 2001,Marbella, Spain, 444-449
60. Petaccia, G.,Savi, F.(2002).’Numerical modelling of shock waves: simulation of a large number of laboratory experiments, *Proceedings of the International Conference in Fluvial Hydraulics, Riverflow 2002* Vol 1, 449-458
61. Petaccia, G.,Savi, F.(2002).’Aspetti applicativi nella simulazione numerica di onde a fronte ripido’. *Atti del 28 Convegno di Idraulica e costruzioni Idrauliche 16-19 settembre, Potenza*, Vol 4, 395-403.
62. Petaccia, G.,Savi, F.(2003)’Two Dimensional simulation of a Dam Break wave propagation for the isolated building test case’3rd IMPACT workshop, 5-7 Novembre 2003, Louvain La Neuve, in stampa

-
63. Roe P.L.(1981).“Approximate Reimann solvers, parameter vectors, and difference schemes”, *Journal of Computational Physics*, vol 43, 357-372.
 64. Sanders B.F.(2001). ”High resolution and non oscillatory solution of the St. Venant equations in non rectangular and non prismatic channels”, *Journal of Hydraulic research*, vol 39 n 3, 321,330
 65. Sleigh P. A., Gaskell P. H., Berzins M., Wright N. G.(1998).”An unstructured finite volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries”, *Computers & Fluids*, vol 27 n 4, 479-508
 66. Soares Frazao S.(2002).”Dam Break induced flow in coomplex topographies, theoretical, numerical and experimental approaches”, *Tesi di Dottorato in Scienze applicate*, Università Cattolica di Louvain
 67. Soares Frazão S.,Sillen X., Zech Y.(1998)”Dam break flow through sharp bends. Physical model and 2D Model validation” *Proceedings of 1st CADAM Meeting*, paper 14, Wallingford
 68. Soares Frazão S., Testa G.(1999). “Numerical model analysis: the Toce river test case”, *Proceedings of 3st CADAM Meeting*, paper 2, Milano.
 69. Soares Frazão S, Zech Y(2000):’ 2D and 1D modelling of the Malpasset dam-break test case’, CADAM, 4th Project Workshop CD-ROM Proceedings, Zaragoza Meeting,18 -19 November 1999
 70. Soares Frazão S, Zech Y.(2002).’ *Dam-break flow experiment : The isolated building test case* ‘, IMPACT, 2nd Project Workshop CD-ROM proceedings, Mo-I-Rana, Norway, September 2002

71. Soares Frazão S,(2003)' Isolated building benchmark –presentation of the modellers results' 3rd IMPACT Workshop. 5-7 Novembre 2003 Louvain La Neuve, in stampa
72. Sturla D.(2002). "Simulazioni lagrangiane di flussi rapidamente variati nell'approssimazione di acque poco profonde", *Tesi di Dottorato In Ingegneria Civile*, Ottobre 2002
73. Townson J.M, Al-Salihi A.H.(1989):"Models of Dam Break Flow in R-T space", *Journal of Hydraulic Engineering*, vol 115 n 5, 561,575
74. Toro E.F. (1997). Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction, Springer Verlag, Berlin
75. Toro E.F., Sleigh P.A. and Morris M.W.(1998).“CADAM A review of testing methods and solutions obtained”, *Proceedings of 1st CADAM Meeting*, paper 4, Wallingford
76. Tseng, M.H., Chu, C.R. (2000).”The simulation of dam-break flows by an improved predictor-corrector TVD scheme”, *Advances in Water Resources*, vol 23:637-643
77. Valiani, A., Caleffi, V. & Zanni, A.(2000).“Codice di calcolo ai volumi finiti per le equazioni alle acque basse: applicazione al crollo della diga di Malpasset”, *Atti del XXVII Convegno di idraulica e costruzioni idrauliche*, Genova, 2000, 357-365
78. Valiani, A., Caleffi, V. & Zanni, A.(2002).“Malapsset Dam Break Simulation using a two dimensional finite volume method”, *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, vol 128 n 5,460-472

Appendice A

Soluzioni Analitiche

A.1. Introduzione

Il problema di determinare la propagazione dell'onda di piena causata dalla rottura di uno sbarramento è stato studiato per più di cento anni. I primi studi sono stati condotti da Ritter (1892), per poi essere portati avanti da altri autori attraverso simulazioni numeriche. Tuttavia una soluzione teorica è disponibile in casi limitati. Solamente poche ricerche hanno avuto risultati accettabili in questo campo, la maggior parte delle quali presentano soluzioni valide per canali di sezione parabolica. Se si considera il caso in cui il tirante presente al di là della diga sia diverso da zero, si svilupperà un'onda d'urto immediatamente dopo il collasso dello sbarramento. Fino a questo momento solo Stoker (1957) ha proposto una soluzione teorica per le onde d'urto dovute al dambreak. Ha derivato la soluzione analitica, che include tre equazioni correlate in tre

variabili, valide per canali prismatici rettangolari infinitamente lunghi a fondo orizzontale in assenza di resistenza al moto. Risolvendo le equazioni in modo simultaneo, o attraverso metodi grafici, si ottengono le soluzioni volute.

Stoker ha sottolineato la presenza di una zona dietro l'onda che si trova in condizioni stazionarie, anche se il flusso e i parametri idraulici a cui ci si riferisce rimangono costanti nel tempo. Le condizioni da cui è influenzato il flusso sono quelle iniziali e quelle presenti nella sezione di valle.

A.2. Problema di Riemann

Il problema con le condizioni iniziali di tirante a valle della diga (vedi fig. A1) e in assenza di perdite di carico viene detto problema di Riemann.

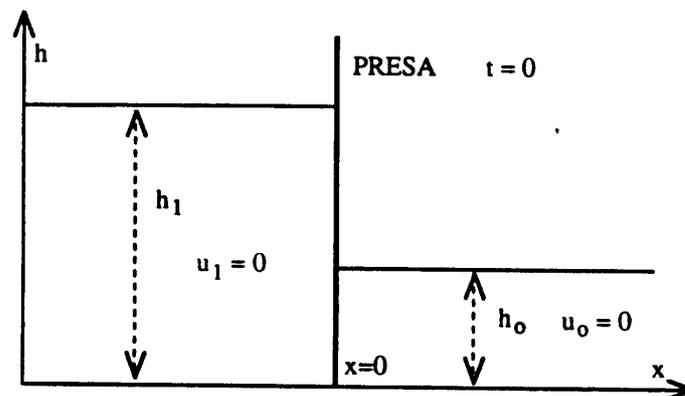


Figura A1-Problema di Riemann

Consideriamo un canale rettangolare separato in due parti da una paratoia ideale, se al tempo $t=0$ si elimina istantaneamente la barriera, il flusso si divide in quattro zone chiaramente differenziate (vedi fig A2): a sinistra una parte del

canale con tirante pari ad h_1 che non ha subito perturbazioni e che chiameremo zona 1, seguita a destra da un'onda di depressione che occupa una zona che chiameremo zona 3. Continuando si incontra una regione con tirante e velocità costanti che è la zona 2, separata da quella con tirante pari ad h_0 da un fronte che si propaga rapidamente verso destra, invadendo la zona 0. L'onda di depressione è delimitata a destra e a sinistra da discontinuità deboli, tracce della discontinuità iniziale e come essa si propagano a velocità c rispetto al fluido, cioè lungo una curva caratteristica.

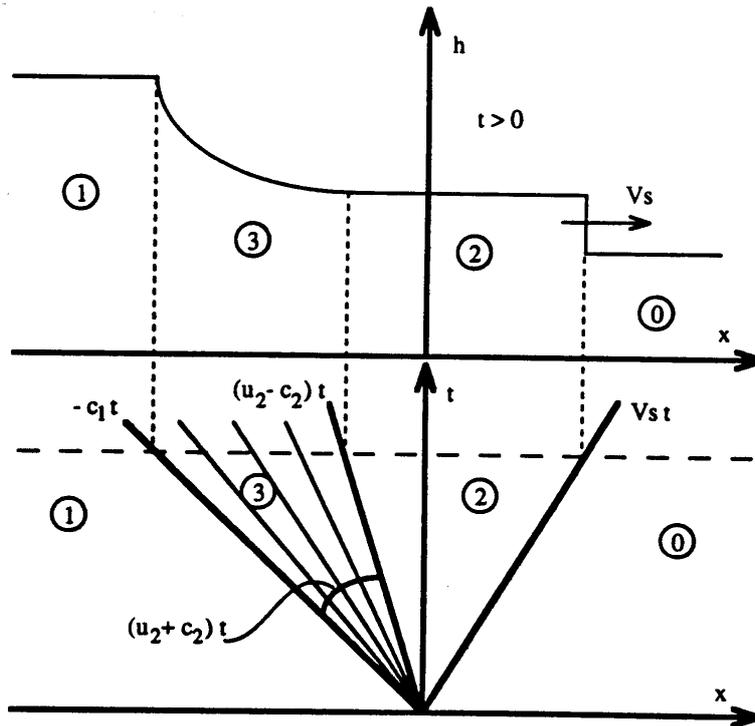


Figura A2-Piano cinematico

L'onda di depressione sarà direttamente a contatto con il fronte a partire dall'istante iniziale. La depressione (zona 3) è contenuta da due regioni a flusso costante e quindi è costituita da un'onda semplice e pertanto la famiglia delle

caratteristiche è composta da rette che partono dall'origine e lungo le quali u e c sono costanti. Allora le regioni 1 e 2 sono collegate dalle caratteristiche della prima famiglia attraverso gli invarianti di Reimann:

$$u_2 + 2c_2 = u_3 + 2c_3 = u_1 + 2c_1 = 2c_1 \quad (\text{A.2.1})$$

Considerando l'andamento del tirante idrico nel tempo, dopo la rottura della paratoia, si vede il fronte che si propaga con velocità $V_s > 0$ e che separa le due regioni 2 e 0.

Per risolvere il flusso nelle regioni 2 e 3 è necessario considerare le equazioni:

$$[F] = [U] \cdot V_s \quad (\text{A.2.2})$$

e la (A.2.1) in modo tale da calcolare V_s arrivando ad una equazione nell'incognita $\xi = \frac{V_s}{c_1}$

$$f(\xi) = \xi \cdot \frac{c_0}{c_1} - \frac{1}{4\xi} \cdot \frac{c_0}{c_1} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \left(\xi \frac{c_1}{c_0} \right)^2} \right) + \left[2 \sqrt{1 + 8 \left(\xi \frac{c_1}{c_0} \right)^2} - 2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{2c_1}{c_0} = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

Nel caso in cui il tirante idrico iniziale sia prossimo all'unità, cioè quando $\frac{c_0}{c_1} \cong 1$ il problema risulta lineare e la velocità di propagazione dell'onda è prossima alla velocità c_1 , quindi risulta $\xi = 1$.

Nell'altro caso estremo, quando cioè il canale è asciutto $c_0 = 0$ e quindi $\frac{c_0}{c_1} = 0$

L'equazione (A.2.3) si risolve facilmente in modo iterativo perché sia l'intervallo di variazione della soluzione che quello del parametro sono noti.

Una volta calcolata la velocità v_s si calcolano le variabili h_2 e u_2 nella regione 2. Il flusso presente nella zona di rarefazione (zona 3) si può calcolare in funzione della famiglia delle caratteristiche secondo la

$$\frac{x}{t} = u_3 - c_3 \quad (\text{A.2.4})$$

che, combinata con la (A.2.1) fornisce la soluzione per la regione 3 :

$$u_3 = \frac{2}{3} \left(c_1 + \frac{x}{t} \right) \quad (\text{A.2.5})$$

$$c_3 = \frac{1}{3} \left(2c_1 - \frac{x}{t} \right) \quad (\text{A.2.6})$$

Si ottiene così la soluzione del problema. Si può osservare che la variazione della velocità in funzione della progressiva x risulta lineare lungo l'onda di rarefazione.

Si possono allora fare delle considerazioni interessanti riguardo alle formule ottenute.

- Se $u_2 < c_2$, cioè il flusso risulta essere subcritico, si nota che la velocità nella posizione iniziale dello sbarramento (per $x=0$) vale $u(0,t)=u_2(0,t)=u_2$ risulta costante nel tempo e dipende solo dal tirante idrico iniziale.
- Se al contrario $u_2 > c_2$ si ottiene $u(0,t)=u_3(0,t)=u_3 = \frac{2}{3}c_1$ dove $h(0,t)=h_3(0,t)=\frac{4}{9}h_1$

Ne consegue che le condizioni nella sezione dello sbarramento non dipendono dal tempo né dalle condizioni iniziali. Questo è conseguenza del fatto che il regime di moto in corrispondenza della paratoia è supercritico e quindi non si ha la possibilità di propagare le informazioni riguardanti la sezione asciutta (di valle).

Il valore limite del rapporto $\frac{h_1}{h_0}$ per cui si verifica questo fenomeno si può calcolare imponendo la condizione $u_2 = c_2$ ottenendo $\frac{h_1}{h_0} = 7.22$

A.3. Problema di Ritter

Il primo tentativo di dare una soluzione al problema dell'onda di sommersione risale al 1892 ad opera di R. Ritter. Si considera un sistema costituito da un canale di lunghezza indefinita, privo di scabrezza e a fondo orizzontale e di sezione rettangolare infinitamente larga, avente una paratoia in posizione intermedia che sostiene una massa di acqua a riposo di altezza h_1 , mentre dall'altra parte della paratoia il fondo è asciutto. Questo può essere

analizzato come caso particolare del problema di Riemann, ponendo il tirante idrico a valle della diga pari a zero.

A causa dell'eliminazione della paratoia si formeranno tre zone: la prima con tirante costante e pari ad h_1 seguita da una zona costituita da un'onda di depressione che termina in una zona a fondo asciutto. La differenza dal caso precedentemente illustrato (par A.2) è l'assenza della zona 2 con la propagazione di un fronte ripido con tirante diverso da zero.

Le regioni 1 e 0 sono sempre legate dalle caratteristiche della prima famiglia attraverso le invarianti di Riemann.

Da un ragionamento simile a quello già espresso nel paragrafo precedente si ottiene la soluzione al problema per le tre zone considerate (vedi fig A3):

- Zona 1:

$$\begin{aligned} h_{ex} &= h_1 \\ u_{ex} &= 0 \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

- Zona 3:

$$\begin{aligned} h_{ex} &= \frac{1}{3} \left(2c - \frac{x}{t} \right)^{2/g} \\ u_{ex} &= \frac{2}{3} \left(c + \frac{x}{t} \right) \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

- Zona 0:

$$\begin{aligned} h_{ex} &= 0 \\ u_{ex} &= 0 \end{aligned} \tag{A.3.3}$$

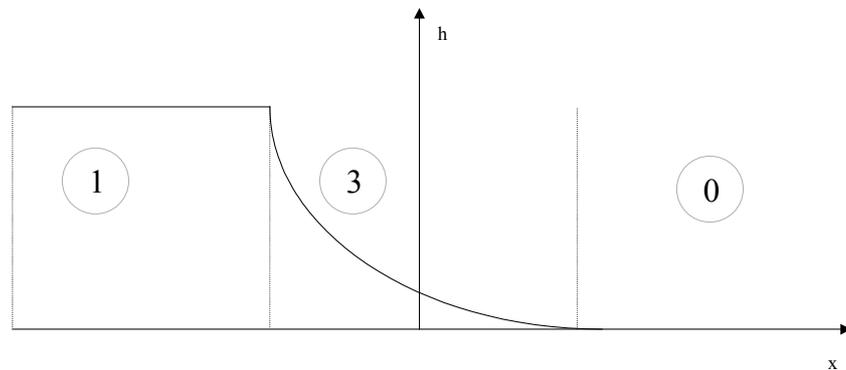


Figura A3-Problema di Ritter

Dai risultati ottenuti da Ritter si possono fare le seguenti considerazioni:

- l'onda ha un profilo parabolico con concavità rivolta verso l'alto e tangente orizzontale sul fronte positivo;
- la velocità ha distribuzione lineare, vale zero sul fronte negativo e $2c_0$ su quello positivo;
- nella posizione dove inizialmente era posta la paratoia, l'altezza è costante nel tempo e vale $\frac{4}{9}h_0$ e la velocità u risulta ugualmente costante e pari a $\frac{2}{3}c_0$. La portata Q allora è costante e vale $\frac{8}{27}\sqrt{g}h_0^{3/2}$;
- nella sezione $x=0$ la corrente è critica, poiché $u=c$, a valle la corrente è supercritica e a monte è subcritica;
- il fronte positivo si propaga a valle con velocità pari a $2c_0$, quello negativo si propaga a monte con velocità $-c_0$.

A.4. Problema di Dressler

L'analisi del problema in esame dopo la rottura della paratoia diviene simile a quella già trattata nei paragrafi precedenti, con la sola aggiunta delle perdite di carico. Si espone nel seguito la teoria di Dressler (Dressler 1952), per maggior completezza e chiarezza, spiegando la natura dei termini correttivi dovuti alla presenza delle perdite di carico. Dressler ha introdotto nell'equazione di conservazione della quantità di moto un termine di resistenza espresso tramite la $\frac{r \cdot u^2}{gh}$, dove r è un parametro adimensionale equivalente ad una accelerazione legato al parametro di resistenza di Chezy dalla :

$$r = \frac{g^2}{C_z^2} \quad (\text{A.4.1})$$

Esprimendo le equazioni del moto in funzione delle variabili u e c e adimensionalizzando tutte le variabili secondo le trasformazioni:

$$X = \frac{x_0}{h_0} ; T = t \sqrt{\frac{g}{h_0}} ; U = \frac{u}{\sqrt{g \cdot h_0}} ; C = \frac{c}{\sqrt{g \cdot h_0}} ; R = \frac{r}{g} \quad (\text{A.4.2})$$

le leggi che regolano il moto possono essere espresse come:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + 2C \frac{\partial C}{\partial X} + R \left(\frac{U}{C} \right)^2 = 0 \quad (\text{A.4.3})$$

$$C \frac{\partial U}{\partial x} + 2C \frac{\partial C}{\partial t} + 2U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.4.4})$$

Ponendo $R=0$ si ottiene in forma adimensionale il sistema di equazioni di De St Venant la cui soluzione è:

$$U_0(X, T) = \frac{2}{3} \left(\frac{X}{T} + 1 \right) \quad (\text{A.4.5})$$

$$C_0(X, T) = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{X}{T} \right) \quad (\text{A.4.6})$$

Se R è maggiore di zero la soluzione delle equazioni (A.4.3) e (A.4.4) differisce da U_0 e C_0 , l'entità della differenza dipende da R . Si può porre allora:

$$U(X, T, R) = U_0(X, T) + \Delta U'(X, T, R) \quad (\text{A.4.7})$$

$$C(X, T, R) = C_0(X, T) + \Delta C'(X, T, R) \quad (\text{A.4.8})$$

Dressler ha espresso le differenze ΔU e ΔC come serie di potenze del parametro R come:

$$U'(X, T, R) = U_0(X, T) + U_1(X, T)R + U_2(X, T)R^2 + \dots \quad (\text{A.4.9})$$

$$C'(X, T, R) = C_0(X, T) + C_1(X, T)R + C_2(X, T)R^2 + \dots \quad (\text{A.4.10})$$

Si introducono allora le due funzioni $K_1(X;T)$ e $K_2(X;T)$ dette “dam-break function” in modo tale che

$$U_1(X,T) = K_1(X,T) \cdot T \quad (\text{A.4.11})$$

$$C_1(X,T) = K_2(X,T) \cdot T \quad (\text{A.4.12})$$

e si arriva alla forma simbolica della soluzione approssimata al primo ordine della (A.4.9) e (A.4.10)

$$\tilde{U}(X,T,\sigma) = U_0(X,T) + K_1(X,T)\sigma \quad (\text{A.4.13})$$

$$\tilde{C}(X,T,\sigma) = C_0(X,T) + K_2(X,T)\sigma \quad (\text{A.4.14})$$

dove $\sigma = RT$.

K_1 e K_2 sono delle funzioni di forma che stabiliscono l'andamento delle correzioni U_1 e C_1 . Possono essere determinate introducendo le (A.4.13) e (A.4.14) nel sistema differenziale di equazioni (A.4.3) e (A.4.4).

Si ottiene una coppia di equazioni differenziali lineari del primo ordine al quale, una volta associate le condizioni al contorno che impongono l'annullamento dell'effetto del termine di resistenza sul fronte negativo dell'onda, conduce alle:

$$K_1(X,T) = -\frac{108}{7\left(2-\frac{X}{T}\right)^2} + \frac{12}{\left(2-\frac{X}{T}\right)} - \frac{8}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{189}\left(2-\frac{X}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.4.15})$$

$$K_2(X, T) = \frac{6}{5\left(2 - \frac{X}{T}\right)^2} - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{135}\left(2 - \frac{X}{T}\right)^{3/2} \quad (\text{A.4.16})$$

Si ottiene allora la soluzione per ciascuna delle tre zone considerate:

- Zona 1:

$$\begin{aligned} h_{ex} &= h_1 \\ u_{ex} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4.17})$$

- Zona 3:

$$\begin{aligned} h_{ex} &= \left(\frac{1}{3}\left(2c - \frac{x}{t}\right) + K_1\right)^{2/g} \\ u_{ex} &= \frac{2}{3}\left(c + \frac{x}{t}\right) + K_2 \end{aligned} \quad (\text{A.4.18})$$

- Zona 0:

$$\begin{aligned} h_{ex} &= 0 \\ u_{ex} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4.19})$$

L'unica differenza con il problema di Ritter è la presenza dei due termini correttivi K_1 e K_2 dovuti alla presenza di perdite di carico e precedentemente illustrate.

A.5. Soluzione di Huang e Zheng

Per ultimo si fa un rapido cenno alle soluzioni analitiche studiate più di recente (Huang e Zheng, 1999) e presenti in letteratura.

Queste fanno riferimento ad alcune relazioni tra il tirante dell'onda d'urto e i valori iniziali del tirante a monte e a valle della diga, espresse attraverso un'equazione algebrica multinomiale, che risulta equivalente alle tre equazioni di Stoker. La soluzione in questione è calcolata per una generica sezione trapezia.

Introducendo una grandezza q che tenga conto dei parametri geometrici della sezione, come la sua larghezza e la pendenza delle sponde, e applicando le equazioni delle caratteristiche alle quattro zone che si formano dopo il sollevamento della paratoia, si ottengono i modelli matematici per le onde dovute alla rottura diga per canali prismatici bagnati di sezione trapezoidale. A partire da queste si arriva alla relazione (A.5.1):

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 - 9\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\left(\frac{h_0}{h_1}\right) + 16\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2}\left(\frac{h_0}{h_1}\right) - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)\left(\frac{h_0}{h_1}\right)\left(\frac{h_0}{h_1} + 8\right) + \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^3 = 0 \quad (\text{A.5.1})$$

che lega il tirante h_2 esclusivamente al rapporto tra il tirante iniziale a valle e quello di monte $\frac{h_0}{h_1}$, dalla quale è possibile ricavare l'altezza d'acqua dell'onda.

Introducendo poi la variabile adimensionalizzata $x^* = \frac{x}{t\sqrt{gh}}$ e il rapporto $\frac{h}{h_1}$ si risolve il problema del dambreak.

A.6. Soluzione di Su e Barnes (1970)

Si sviluppa la soluzione di Dressler, valida per canali di larghezza infinita, per ottenere soluzioni nel caso di sezioni a geometria varia (rettangolari, paraboliche o triangolari), trascurando o considerando le perdite di carico. Esprimendo le perdite di carico con la relazione di Chezy e l'area della sezione del canale con la generica $A = \delta y^\lambda$, dove con y si è indicata la profondità e con δ e λ due costanti che variano con la forma del canale ($\lambda=1$ per canali rettangolari, $\lambda=1.5$ per canali parabolici, $\lambda=2$ per canali triangolari)

La soluzione del profilo della superficie libera e della distribuzione media della velocità, nel caso di assenza di perdite di carico è:

$$C = a \left(\alpha - \beta \frac{X}{T} \right) \quad (\text{A.6.1})$$

$$U = 2\beta + \alpha \frac{X}{T} \quad (\text{A.6.2})$$

Essendo $C = \frac{c}{\sqrt{gy_0}}$, $X = \frac{x}{y_0}$, $T = t \sqrt{\frac{g}{y_0}}$, $U = \frac{u}{\sqrt{gy_0}}$ le grandezze adimensionalizzate. Le costanti α e β sono funzioni della geometria della sezione e si possono ricavare da tabelle presenti in letteratura, la grandezza a è funzione del tirante idrico.

Nel caso di presenza di perdite di carico si ottiene la soluzione:

$$U = U^0 + h\left(\frac{X}{T}\right)RT \quad (\text{A.6.3})$$

$$C = C^0 + K\left(\frac{X}{T}\right)RT \quad (\text{A.6.4})$$

dove U^0 e C^0 sono le soluzioni di ordine zero del sistema di equazioni di continuità e di quantità di moto.

